كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا١

المحاضرة : الرابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

التمرين الأول:

ليكن $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ تابعاً معرّفاً

$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

المطلوب تحقق من كون $(\mathbb{R}^n, d)$ فضاء متري أولاً

الحالة 1

1. $d(x,y) = 0 \overset{?}{\iff} x = y$

$d(x,y) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i| = 0$

$\iff |x_i - y_i| = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$

$\iff x_i - y_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\iff x_i = y_i \quad \forall i = \overline{1,n}$

والشرط الأول محقق

2. $d(x,y) \overset{?}{=} d(y,x)$

$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$\sum_{i=1}^{n} |-(y_i - x_i)| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d(y,x)$

والشرط الثاني محقق

3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,x)$

$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i|$

نفرض $a = x_i - z_i$ ، $b = z_i - y_i$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| = d(x,z) + d(z,y)$$

وهذا $(\mathbb{R}^n, d)$ فضاء متري.

التمرين الثاني: لتكن x_n

$E = \{ x_n \text{ متتالية عددية} \}$

وليكن $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ تابعاً معرفاً على الشكل التالي:

$$d(x_n, y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

المطلوب تحقق أن d تابع مسافة على E

(1) $d(x_n, y_n) = 0 \iff (x_n) = (y_n)$.

$$d(x_n, y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} = 0$$

$$\iff |x_n - y_n| = 0$$

$$\iff x_n - y_n = 0 \iff x_n = y_n$$

$$\iff (x_n) = (y_n)$$

والشرط الأول محقق.

(2) $d(x_n, y_n) \stackrel{?}{=} d(y_n, x_n)$

$$d(x_n, y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|-(y_n - x_n)|}{1 + |-(y_n - x_n)|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n - x_n}{1 + |y_n - x_n|} = d(y_n, x_n)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

والشرط الثالث محقق:

③ $d(x_n, y_n) \le d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$.

ملاحظة:

$a < b \Leftrightarrow \frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$ *

$|x_n - y_n| = |x_n - z_n + z_n - y_n|$

$|x_n - y_n| \le |x_n - z_n| + |z_n - y_n|$

a $\quad$ b

حسب المتراجحة *

$$\frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|} \le \frac{|x_n - z_n| + |z_n - y_n|}{1+|x_n - z_n| + |z_n - y_n|}$$

$$\frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|} \le \frac{|x_n - z_n|}{1+|x_n - z_n| + |z_n - y_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1+|x_n - z_n| + |z_n - y_n|}$$

$$\le \frac{|x_n - z_n|}{1+|x_n - z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1+|z_n - y_n|}$$

$$= \frac{1}{2^n}\frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|} + \frac{|x_n - z_n|}{1+|x_n - z_n|} + \frac{1}{2^n}\frac{|z_n - y_n|}{1+|z_n - y_n|}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|z_n-y_n|}{1+|z_n-y_n|}$$

الشرط الثالث محقق و التابع تابع مسافة

التمرين التالي:

ليكن (E,d) فضاء متري كيفي $d^*: E\times E \to \mathbb{R}^+$ تابعاً معرفاً على الشكل التالي

$d^*(x,y) = \alpha\, d(x,y) \quad \forall x,y \in E$.

حيث α عدد حقيقي موجب تماماً و المطلوب تحقق أن (E,d^*) فضاء متري أم لا.

الحل:

1. $d^*(x,y)=0 \iff x=y$

$d^*(x,y)=0 \iff \alpha\, d(x,y)=0$

$d(x,y)=0 \iff x=y$.

والشرط الأول محقق

2. $d^*(x,y)=d^*(y,x)$

$d^*(x,y)=\alpha d(x,y)=\alpha d(y,x)=d(y,x)$

والشرط الثاني محقق

3. $d^*(x,y) \leq d^*(x,z)+d^*(z,y)$

بما أن d تابع مسافة فهو يحقق الشرط

$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

$\alpha d(x,y) \leq \alpha d(x,z)+\alpha d(z,y)$

$d^*(x,y) \leq d^*(x,z)+d^*(z,y)$

والشرط الثالث محقق و (E,d^*) فضاء متري.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمرين الرابع:

$d^*: E \times E \to \mathbb{R}^*$

$d^*(x,y) = [d(x,y)]^2$

تحقق أن d^* تابع مسافة أم لا.

① $d^*(x,y) = 0 \iff x = y$.

$d(x,y) = (d(x,y))^2 = 0$.

$d(x,y) = 0 \iff x = y$.

والشرط الأول محقق.

② $d^*(x,y) = d^*(y,x)$

$d^*(x,y) = (d(x,y))^2 = (d(y,x))^2 = d^*(y,x)$

والشرط الثاني محقق.

$d^*(x,y) \leq d^*(x,z) + d^*(z,x)$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$[d(x,y)]^2 \leq [d(x,z)]^2 + [d(z,y)]^2 + 2d(x,z)d(z,y)$

$(a-b)^2 \geq 0 \iff a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$

$a^2 + b^2 \geq 2ab$.

$(d(x,y))^2 \leq 2[d(x,z)]^2 + 2[d(z,y)]^2$

بالتقسيم على 2

$\frac{1}{2}(d(x,y))^2 \leq (d(x,z))^2 + (d(z,y))^2$

$\frac{1}{2} d^*(x,y) \leq d^*(x,z) + d^*(z,y)$

الشرط الثالثة غير محقق ومنه d ليست تابع مسافة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة