كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا عامة١

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

لماذا سُمّيَ تابع d_{Exe} بتابع المسافة؟

تتلخّص الإجابة بالأسباب الآتية:

1. معلوم لدينا في الرياضيات أنّ أيّاً كانت الموضوعات A و B فالمسافة أو البُعد بينهما يقاس بعدد حقيقي موجب وهذا يتوافق مع كون مجموعة قيم تابع المسافة هي مجموعة جزئية من R^+

2. أيضاً معلوم لدينا أنّ الشرط اللازم والكافي لانطباق نقطتين على بعضهما هو أنه تكون المسافة بينهما معدومة وهذا ينطبق مع الشرط الأول من تعريف تابع المسافة

3. أيضاً معلوم في الرياضيات أنّ المسافة من الموضوع A إلى الموضوع B هي نفسها المسافة من B إلى A وهذا يتوافق مع الشرط الثاني من تعريف تابع المسافة

4. نعلم أنّ أيّاً كانت النقاط A و B و C إما

* تقع على مستقيم واحد يكون لدينا الحالتان:

1. C بين A و B وهنا تتحقق العلاقة:

البُعد بين A و B = مجموع البعدين من A إلى C ومن C إلى B

2. C خارج النقطتين A و B عندئذٍ تتحقق المتراجحة

(1) ..... بعد C عن A + بعد B عن C ≥ بعد A عن B

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

* النقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة فهي تشكل مثلث (المسافة بين النقاط مثنى مثنى تشكل أطوال أضلاع المثلث ABC).

بينما المعلوم في المتراجحة أعلاه ضلع في المثلث أصغر أو يساوي مجموع طولي الضلعين الباقيين وهنا تتحقق المتراجحة (1).

كل الحالات هنا يتوافق مع الشرط الثالث من تعريف المسافة.

تذكرة:

متراجحة كوشي:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

مثال: نعرف التابع $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ بالشكل الآتي:

$$d(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$$

حيث:

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

تحقق أن d يعرف تابع مسافة على $\mathbb{R}^n$.

الحل: من تعريف الجذر:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \geq 0$$

(1) $d(X,Y) = 0 \iff \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Leftarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=0 \Leftarrow (x_i-y_i)^2=0 \Leftarrow x_i-y_i=0$

$\Leftrightarrow x_i=y_i \quad \forall i=\overline{1,n}$

$\Leftrightarrow X=Y.$

والشرط الأول محقق.

(2). $d(X,Y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=d(Y,X)$

الشرط الثاني محقق.

(3).

من أجل x,y,z من $\mathbb{R}^n$ يجب اثبات أنه

$d(X,Y)\leq d(X,Z)+d(Z,Y)$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \overset{?}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}$$

نفرض $\begin{cases} x_i-z_i=a_i \\ z_i-y_i=b_i \end{cases}$ بالجمع

$x_i-y_i=a_i+b_i$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

حسب متراجحة كوشي:

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}$$

وبالتالي الشرط الثالث محقق مما سبق نجد أنه لدينا تابع المسافة على $\mathbb{R}^n$ يطلق عليه تابع المسافة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المافة الاقليدية والفضاء المتري الناتج $(\mathbb{R}^n, d)$
يدعى الفضاء المتري الإقليدي نوني البعد.
حالات خاصة:

* $n=1 \Rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1$

$$d(x,x) = d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$$

وهو تابع المافة العادية على $\mathbb{R}$ و $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ حيث $|\cdot|$ تعني قيمة مطلقة (ضمنا متغير) الفضاء المتري الحقيقي العادي.

* $n=2$ نحصل على المستوي الاقليدي
* $n=3$ نحصل على الفراغ الاقليدي

مثال: لتكن $E \neq \varphi$ مجموعة كيفية من العناصر ولتكن

$$d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

تابع معرف بالشكل

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ x = y \\ 1 & ; \ x \neq y \end{cases}$$

تحقق أن d يمثل تابع مافة على E

الحل:

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) * $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$

$y = x \Leftrightarrow d(y,x) = 0$

$x \neq y \Leftrightarrow d(x,y) = 1$

$y \neq x \Leftrightarrow d(y,x) = 1$

$d(x,y) = d(y,x)$ في جميع الحالات نجد

والشرط الثانية محقق.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(3)

- يجب تحقق الشرط:

$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

* $x=y \Rightarrow d(x,y)=0$ أي المتراجحة $0 \leq d(x,z)+d(z,y)$

* $x \neq y \Rightarrow d(x,y)=1$ فالمتراجحة $1 \leq d(x,z)+d(z,y)$ غير محققة هنا يناقض الفرض

$x=y \Rightarrow \begin{cases} x=z \Leftrightarrow d(x,z)=0 \\ z=y \Leftrightarrow d(z,y)=0 \end{cases}$ يكون $x \neq y$

بالتالي حالة:

$d(x,z)=d(z,y)$ غير محققة بالتالي المتراجحة محققة في حالة $x \neq y$

- في حالة $x=y$ و $x \neq y$ متراجحة المثلث محققة أي الشرط الثالث محقق

إذاً d تابع مسافة على E ونسمي هذا التابع تابع المسافة المتبلد ونسمي الفضاء المتري الناتج (E,d) بالفضاء المتري المنقطع.

الكرات:

تعاريف: ليكن (E,d) فضاء متري كيفي و a نقطة مفروضة منه تعاطى وليكن ρ عدداً "حقيقياً" مفروضاً

1. تسمى مجموعة النقاط $\{x \in E ; d(x,a)<\rho\}$ كرة مفتوحة في الفضاء المتري (E,d) مركزها a ونصف قطرها ρ ويرمز لها بالرمز $N(a,\rho)$ أو $N_\rho(a)$ ونكتب

$N(a,\rho)=\{x \in E ; d(x,a)<\rho\}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② نسمي مجموعة النقاط $\{x\in E; d(x,a)<\rho\}$ كرة مفتوحة في (E,d) مركزها a ونصف قطرها ρ ونرمز لها بالرمز

$$B(a,\rho)=\{x\in E; d(x,a)<\rho\}$$

③ نسمي مجموعة النقاط $\{x\in E; d(x,a)=\rho\}$ سطح الكرة مركزها a ونصف قطرها ρ ونرمز لها بالرمز

$$S(a,\rho)=\{x\in E; d(x,a)=\rho\}.$$

④ ندعو جواراً للنقطة a في الفضاء المتري (E,d) كل كرة مفتوحة مركزها في هذه النقطة.

* ندعو جواراً "مغلقاً" لـ a كل كرة مغلقة مركزها النقطة a.

ملاحظات ونتائج:

① من تعريف الكرة المغلقة نجد أن:

$$B(a,\rho)=\{x\in E; d(x,a)\le\rho\}=\{x\in E; d(x,a)<\rho\}\cup\{x\in E; d(x,a)=\rho\}$$
$$=N(a,\rho)\cup S(a,\rho).$$

أي أن الكرة المغلقة هي اجتماع للكرة المفتوحة الموافقة معها بنصف القطر والمركز وسطح الكرة الموافقة.

② إذا كان:

$$N(a,\rho)=\{x\in E; d(x,a)<0\}=\varphi$$
$$B(a,\rho)=\{x\in E; d(x,a)\le 0\}=\{a\}$$
$$S(a,\rho)=\{x\in E; d(x,a)=0\}=\{a\}$$

③ تبين شكل الكرات في الفضاء المتري العادي $(R,|\cdot|)$

~~مفروضة~~ a نقطة مفروضة في $(R,|\cdot|)$ و r عدد حقيقي.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* الكرات المفتوحة:

$$N(a,\rho) = \{x \in \mathbb{R} ; d(x,a) < \rho\} = \{x \in \mathbb{R} ; |x-a| < \rho\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} ; -\rho < x-a < \rho\} = \{x \in \mathbb{R} ; a-\rho < x < a+\rho\}$$

$$=]a-\rho, a+\rho[$$

أي أن الكرات المفتوحة في الفضاء المتري العادي $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ عبارة عن مجالات مفتوحة مركزها a مركز الكرة ونصف قطرها ρ نصف قطر الكرة.

* بالعكس في $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ كل مجال مفتوح مركزه a ونصف قطره ρ هو كرة مفتوحة لها نفس المركز.

* الكرات المغلقة:

$$B(a,\rho) = \{x \in \mathbb{R} ; d(x,a) \leq \rho\} = \{x \in \mathbb{R} ; |x-a| \leq \rho\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} ; a-\rho \leq x \leq a+\rho\} = [a-\rho, a+\rho]$$

* سطح الكرة:

$$S(a,\rho) = \{x \in \mathbb{R} ; d(x,a) = \rho\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} ; |x-a| = \rho\} = \{a-\rho, a+\rho\}$$

أي سطح الكرة في $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ عبارة عن النقطتين $a-\rho$ و $a+\rho$.

(4) نستنتج أن المفهوم الحدسي للكرة يختلف عن المفهوم التبولوجي لها إذ أن شكل الكرة في الفضاء المتري العادي هو مجموعة مؤلفة من نقطتين فقط بينما شكل الكرة حدسياً

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

كذلك:

* يتطابق المفهوم الهندسي والتوبولوجي في الفضاء المتري الإقليدي ذا البعد.

توضيح $(\mathbb{R}^3, d)$ لدينا:

$$S(a,\rho) = \{x \in \mathbb{R}^3 ; d(x,y) = \rho\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}^3 ; \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2} = \rho\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}^3 ; \sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2 = \rho^2\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}^3 ; (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 = \rho^2\right\}$$

$$N(y,\rho) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 ; \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} < \rho\right\}$$

أي الكرة المفتوحة في $(\mathbb{R}^2, d)$ هي سطح الدائرة المواقفة لها دون المحيط.

* الكرة المغلقة في $(\mathbb{R}^2, d)$ تمثل سطح الدائرة المواقفة مع محيطها.

- تعيين شكل الكرات في الفضاء المتري المختلط (E, d).

- الكرات المفتوحة:

$$N(a,\rho) = \{x \in E ; d(x,a) < \rho\}$$

بسبب تعريف الكرة المفتوحة

$$d(x,a) \begin{cases} 0 & ; \ x = a \to a < 0 \text{ و } \rho = 0 \\ 1 & ; \ x \neq a \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$d(x,a)=\begin{cases}0 & ; x=a\\ 1 & ; x\neq a\end{cases}$$

* $\rho=0$ ⟵ $d(x,a)=0$; $x=a \Rightarrow d(x,a)<\rho$
$d(x,a)=1$; $x\neq a \Rightarrow d(x,a)<\rho$

$\Leftarrow$ من أجل $\rho=0$ لدينا $N(a,\rho)\neq\varphi$

* $0<\rho\leq 1$

$d(x,a)=0$; $x=a \longrightarrow d(x,a)<\rho$ محققة

$d(x,a)=1$; $x\neq a \Rightarrow d(x,a)<\rho$ غير محققة

$N(a,\rho)=\{a\}$ $\Leftarrow$ $0<\rho\leq 1$ من أجل

$\rho>1$ محققة

$d(x,a)=0$; $x=a \Rightarrow d(x=1<\rho)$

$d(x,a)=1$ $x\neq a \Rightarrow d(x,a)<\rho$

محققة

$\Leftarrow$ من أجل $\rho>1$ غير محققة

$N(a,\rho)=E$

$$N(a,\rho)=\begin{cases}\varphi ; & \rho=0\\ E ; & \rho>0\\ \{a\} ; & 0<\rho\leq 1\end{cases}$$

الكرات المغلقة:

• مثال تعريف الكرة المغلقة

$B(a,\rho)=\{x\in E ; d(x,a)\leq\rho\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال تعريف الكرة المغلقة:

$d(x,a) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ $\quad \rho = 0$ محققة $\quad 0 < \rho < 1$

$0 \le \rho \le 1$

① $x = a \Rightarrow d(x,a) = 0 \Rightarrow d(x,a) \le \rho$ محققة

② $x \neq a \Rightarrow d(x,a) = 1 \Rightarrow d(x,a) \le \rho$ غير محققة

$$\Rightarrow \boxed{P(a,\rho) = \{a\} \; ; \; 0 \le \rho < 1}$$

$\rho \ge 1$

① $x = a \Rightarrow d(x,a) = 0 \Rightarrow d(x,a) \le \rho$ محققة

② $x \neq a \Rightarrow d(x,a) = 1 \Rightarrow d(x,a) \le \rho$ محققة

$$\Rightarrow P(a,\rho) = E \; ; \; \rho \ge 1$$

بالتالي:

$$P(a,\rho) = \begin{cases} \{a\} ; & 0 \le \rho < 1 \\ E ; & \rho \ge 1 \end{cases}$$

السطح الكروي

$$S(a,\rho) = \{x \in E \; ; \; d(x,a) = \rho\}$$

ولكن من تعريف تابع المسافة المبتذل نجد أنه

$d(x,a) = \begin{cases} 0 \; ; \; x = 0 \Rightarrow \rho = 0 & \text{محققة من أجل } \rho = 0 \\ 1 \; ; \; x \neq a \Rightarrow \rho = 1 & \text{محققة من أجل } \rho = 1 \end{cases}$

بالتالي: $S(a,\rho) = \begin{cases} \{a\} \; ; \; \rho = 0 \\ E - \{a\} \; ; \; \rho = 1 \\ \varphi \; ; \; \rho \neq 0 \end{cases}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z