كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا عامة١

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

تمرين: لتكن E مجموعة غير منتهية كيفية ولنفرض
$T=\{T\in P(E): E\setminus T$ منتهية$\}\cup\{\varphi\}$ عليط الأسرة T بالشكل
أثبت أن T تعرف توبولوجيا على E ثم عين أسرة جميع
المجموعات المغلقة (E,T)

الحل:

① نتحقق من شروط التوبولوجيا:

① من تعريف T نجد أن $\varphi\in T$

$E\in P(E)$ و $E\in T$ $\Leftarrow E\setminus E=\varphi$ منتهية

والشرط الأول محقق

② أيا يكن $T,G\in T$ لنثبت أن $T\cap G\in T$ نميز حالتين
أي نثبت أن $E\setminus(T\cap G)$ منتهية

a. $T=\varphi$ أو $G=\varphi$ أو كلاهما $\Leftarrow T\cap G=\varphi\in T$

b. $T\neq\varphi$ و $G\neq\varphi$

$T\in T \Rightarrow T\in P(E)$ و $E\setminus T$ منتهية

$G\in T \Rightarrow G\in P(E)$ و $E\setminus G$ منتهية

لدينا حسب دمورغان

$\Rightarrow (E\setminus T)\cup(E\setminus G)=E\setminus(T\cap G)$

منتهية

وبما أن $(E\setminus T)\cup(E\setminus G)$ منتهية

الأنّه اجتماع مجموعتين منتهيتين E I (T N G) مجموعة منتهية ومنه الحالتين نجد أنّه الشرط الثالث محققة

③ لتكن $\{G_i ; i \in I\}$ أسرة كيفية من T والمطلوب أنّه $\bigcup_{i \in I} G_i \in T$ أي E I $(\bigcup_{i \in I} G_i)$ مجموعة منتهية أو $\bigcup_{i \in I} G_i = \phi$ ومنه حالتين

ⓐ $\forall i \in I \quad G_i = \phi \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i = \phi \in T$.

ⓑ $i \in I$ و $G_i \in T \Rightarrow$ E I G_i منتهية $\forall i$

$\bigcap_{i \in I} (E I G_i) = E I \bigcup_{i \in I} G_i$

بما أنّه E I G_i مجموعة منتهية $\Rightarrow \bigcap (E I G_i)$ مجموعة منتهية $\Rightarrow$ E I $\bigcup_{i \in I} G_i$ مجموعة منتهية $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in T$

ومنه الحالتين نجد أنّه الشرط الثالث محققة

ومنه ما سبق نجد أنّ T تعرف توبولوجيا على E

$T = \{F \in P(E) ; F\} \cup \{E\}$.

تمرين: نعرّف على المجموعة $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية التبولوجيا T بالشكل

$T = \{T \in P(\mathbb{R}) ; \text{منتهية } \mathbb{R} \setminus T\} \cup \{\phi\}$

① جد أسرة جميع المجموعات المغلقة في (E,T)

② لتكن المجموعات $A =]-2, 10]$ ، $B = \{3, 7, 16, 22\}$ ، $C = \mathbb{R} \setminus \{24\}$

ثم A° ، B° ، C° ، $\overline{A}$ ، $\overline{B}$ ، $\overline{C}$ ، bdA ، bdB

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

bdc

(3) . جد ثلاث مجاورات لـ A

الحل:

(1) . $\xi = \{F \in P(\mathbb{R}) ; F$ منتهية$\} \cup \{\mathbb{R}\}$

(2) . A° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A

$A^\circ = \varphi$

الإثبات: لنفرض أنه $A^\circ = D$ أي D مجموعة مفتوحة (أي $D = \varphi$ أو $R \setminus D$ منتهية) لدينا الدائرة دوماً محتواة في A

محققة دوماً $A^\circ \subset A$

$D \subset A$

$R \setminus D \supset R \setminus A$

لدينا $R \setminus A$ غير منتهية

$R \setminus D$ غير منتهية يناقض كون ($R \setminus D$ منتهية $\Leftarrow D \in \xi$)

أي لا يوجد مجموعة φ محتواة في A

ملاحظة: في توبولوجيا المتمات المنتهية A غير منتهية و متمتها غير منتهية داخلياً φ

A منتهية $\Leftarrow A^\circ = \varphi$

B° أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في B.

بما أن B منتهية $\Leftarrow$ لا يوجد مجموعة φ منتهية محتواة في B $\Leftarrow B^\circ = \varphi$

C° أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في C

$C^\circ = C \Leftarrow C \in \xi$ منتهية $\Leftarrow R \setminus C = \{2,4\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$ext A = (\mathbb{R}\setminus A)^\circ = (\mathbb{R}\setminus]-2,10])^\circ = \varphi$

$ext B = (\mathbb{R}\setminus B)^\circ = \mathbb{R}\setminus B$

بما أنّ B منتهية $\Rightarrow$ لأنّ $\mathbb{R}\setminus B \in \tau$ $\Rightarrow B = \mathbb{R}\setminus T$

$ext C = (\mathbb{R}\setminus C)^\circ = (\{2,4\})^\circ = \varphi$

$\bar{A} = E = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ A أصغر مجموعة مغلقة تحوي A

بما أنّ المجموعة المغلقة إما مجموعات منتهية أو مجموعة $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ لا يوجد مجموعة منتهية تحوي A لأنّ A غير منتهية وهنك لا توجد مجموعة مغلقة تحوي A سوى $\mathbb{R}$

$bd A = \bar{A} \setminus A^\circ = \mathbb{R}$

$bd B = \bar{B} \setminus B^\circ = B$ $\Rightarrow B \in \tau$ $\Rightarrow$ B منتهية

$\bar{C} = \mathbb{R} \Rightarrow bd C = \mathbb{R}\setminus C$

③ $\forall$ مجاورة لـ A $\Rightarrow$

$\exists T \in \tau ; A \subseteq T \subseteq V$

$\Rightarrow T \subseteq V$

$\mathbb{R}\setminus T \supseteq \mathbb{R}\setminus V$

$\Rightarrow T \in \tau$ ولدينا بالفرض

$\mathbb{R}\setminus T$ منتهية $\Rightarrow \mathbb{R}\setminus V$ منتهية فـ V غير منتهية

$V_1 = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$; $V_2 = \mathbb{R}\setminus\{-3,11,12\}$

$V_3 = \mathbb{R}\setminus\{-5,-6\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف (دورات): لتكن A و B مجموعتان كيفيتان من نقاط فضاء توبولوجي (E,T).

1. يُقال عن A أنها كثيفة في المجموعة B في (E,T) إذا وفقط إذا كان $B \subseteq \bar{A}$.

2. يُقال عن A أنها كثيفة في كل مكان في (E,T) إذا وفقط إذا كانت كثيفة في كل مجموعة من نقاط (E,T) ($C \subseteq \bar{A} \vee C \subseteq E$ ..)

ملاحظات ونتائج:

1. إذا كانت A كثيفة في E في (E,T) هذا يعني أن $E \subseteq \bar{A}$ ولدينا $A \subseteq E$ محققة دوماً $\bar{A} = E$

2. تكون A مجموعة كيفية من نقاط فضاء توبولوجي (E,T) عندئذٍ تكون المجموعة A كثيفة في كل مكان في (E,T) إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$G \cap A \neq \varphi \quad \forall G \in T / \{\varphi\}$.

الإثبات: بالفرض A كثيفة في كل مكان أي $\bar{A} = E$ ولتكن $G \neq \varphi$ مجموعة مفتوحة في (E,T) ولنثبت أن $G \cap A \neq \varphi$

بما أن $G \neq \varphi$ يوجد نقطة على الأقل x بحيث $x \in G$ ولدينا G مجموعة مفتوحة أي G مجاورة لكل نقطة من نقاطها أي G مجاورة لـ x.

$x \in G \subset E = \bar{A}$ $\Leftarrow$ $G \in V(x)$ & $x \in \bar{A}$

بما أن A كثيفة في كل مكان.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$G \cap A \neq \varphi$ ⟸

بالفرض $G \cap A \neq \varphi$ أيّاً كانت $G \in \tau \setminus \{\varphi\}$

ولنثبت أنّ A كثيفة في كلّ مكان أي $\bar{A} = E$

لتكن $x \in E$ نقطة كيفية لـ x في (E, τ) سنثبت

تعريف المجاورة توجد مجموعة مفتوحة $G \neq \varphi$ بحيث

$x \in G \subset V$ وبما أنّ $G \cap A \neq \varphi$ لدينا

$x \in \bar{A}$ وبما أنّ x نقطة كيفية في E $\Rightarrow E \subset \bar{A}$

ولدينا $\bar{A} \subset E$ وبالتالي $\bar{A} = E$ وهو المطلوب.

تعريف: إذا كان (E, τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً وكانت

β أسرة كيفية من المجموعات المفتوحة في (E, τ) يُقال

عن الأسرة β أنها تشكّل قاعدة أو أساس للتبولوجيا

τ أو قاعدة للفضاء التبولوجي (E, τ) إذا وفقط إذا كان

كل عنصر في τ يكتب على شكل اجتماع لعناصر الأسرة β.

ملاحظة:

1. β قاعدة لـ τ ⟺

(1) $\beta \subset \tau$ ((أسرة كيفية من المجموعات المفتوحة))

(2) $\forall T \in \tau$; $T = \bigcup_{B_i \in \beta} B_i$

2. إذا كانت $E \neq \varphi$ مجموعة كيفية و τ تبولوجيا

كيفية على E وكانت $\beta = \tau$ فإننا نلاحظ أنّ $\beta = \tau$ أي

المجموعات المفتوحة في (E, τ) ثمّ إنّه من أجل $T \in \tau$ وبما

أنّ $\beta = \tau$ فإنّ $T = B \in \beta$ لذلك فإنّه

$T = T \cup T \cup \dots \cup T = B \cup B \cup \dots \cup B \Rightarrow T = \bigcup_{B \in \beta} B$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي كلّ عنصر من τ يكتب على شكل اجتماع لعناصر من β إذاً $\beta \subset \tau$ تشكل قاعدة لـ τ.

بما أنّ τ توبولوجيا كيفية على E فإنّ كلّ توبولوجيا قاعدة لنفسها.

β. إنّ عكس الملاحظة 2 غير صحيح بالضرورة عامةً (أي أنّ ليس بالضرورة أن تكون كلّ قاعدة لـ τ توبولوجيا)

مثال: لنأخذ $E=\{a,b,c\}$ و $\tau=P(E)$ ولنفرض

$\beta=\{\varphi,\{a\},\{b\},\{c\}\}$

أثبت أنّ β قاعدة لـ τ وليست توبولوجيا.

الحلّ: $\beta \subset P(E)=\tau$ ← الشرط الأول محقق.

② $\varphi \in \tau$; $\varphi=\varphi \cup \varphi$ $\varphi \in \beta$

$E \in \tau$; $E=\{a\}\cup\{a\}\cup\{c\}$; $\{a\},\{b\},\{c\} \in \beta$

$\{a\}=\{a\}\cup\{a\}\cup\varphi$ و $\{a\},\varphi \in \beta$; $\{a\},\{c\} \in \beta$

$\{a,c\}=\{a\}\cup\{c\}$

$\{b,c\}=\{b\}\cup\{c\}$

$\{a,b\}=\{a\}\cup\{b\}$

وجدنا كلّ مجموعة مفتوحة $(T \in \tau)$ تكتب على شكل اجتماع لعناصر من β فالشرط الثاني محقق ←

β تشكل قاعدة لـ τ

* بما أنّ $E \notin P$ و $\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\} \notin P$ ← β لا تحقق شرط التوبولوجيا

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الفضاءات المترية

ملاحظة: إنّ جميع المفاهيم التي درسناها في حالة الفضاء التبولوجي تتحقق في الفضاء المتري الذي هو حالة خاصة للفضاء التبولوجي وليس كل مفاهيم وخواص الفضاء المتري تتحقق في الفضاء التبولوجي

تعريف: لتكن $E \neq \varphi$ مجموعة كيفية من العناصر وليكن $f: E \times E \to \mathbb{R}^+$ تابعاً يحقق الشروط الآتية

1. $x = y \iff f(x,y) = 0$
2. من أجل كل x من E لدينا $f(x,y) = f(y,x)$
3. من أجل كل x, y, z من E لدينا

$$f(x,y) \leq f(x,z) + f(z,y).$$

عندئذٍ نسمي التابع f تابع مسافة على E ويرمز له بـ d

نسمي الثنائية (E,d) فضاءً متريّاً

ونسمي عناصر المجموعة E نقاط الفضاء المتري (E,d)

مثال:

لنأخذ مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ولنعرف التابع

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

ولنعرف d بالشكل

$$d(x,y) = |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

اثبت أنّ التابع d يعرّف تابع مسافة على $\mathbb{R}$.

الحل:

نتحقق من شروط تابع المسافة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

① $d(x,y)=0 \Leftrightarrow |x-y|=0$

والشرط الأول $\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

محقق.

② $\forall x,y \in \mathbb{R} \quad d(x,y)=d(y,x)$

$d(x,y)=|x-y|=|-(y-x)|=|-1||y-x|$

$=|y-x|=d(y,x)$

والشرط الثاني محقق.

③ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}, \quad d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

$d(x,y)=|x-y|=|x-z+z-y| \leq |x-z|+|z-y|$

$=d(x,z)+d(z,y)$

الشرط الثالث محقق

من الشروط الثلاثة نجد أن d يعرف مسافة على $\mathbb{R}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة