كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية١

المحاضرة : الثالثة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تمرين: حلّ المعادلات التفاضلية:

(1) $y' = \frac{x+y-1}{x-y+5}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x-y+5}$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = 1 \neq -1$

المستقيمات متقاطعات

$x+y-1=0$ ... (1)

$x-y+5=0$ ... (2)

بالحل المشترك لـ 1 و 2 نجد نقطة تقاطع المستقيمات هي: $(-2,3)$

نفرض: $x=2+X \Rightarrow dx=dX$

$y=3+Y \Rightarrow dy=dY$

$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$

متجانسة من الدرجة الأولى نفرض لحلّها:

$Z=\frac{Y}{X}$ أو

$Y=Z.X$

$dY = X dZ + Z dX$

$$\frac{X\,dZ + Z\,dX}{dX} = \frac{X + ZX}{X - ZX}$$

$$= \frac{X[1+Z]}{X[1-Z]} \Rightarrow \frac{X\,dZ + Z\,dX}{dX} = \frac{1+Z}{1-Z}$$

$$\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)dX = X\,dZ + Z\,dX$$

$$\left(\frac{1+Z}{1-Z} - Z\right)dX = X\,dZ$$

$$\left(\frac{1+Z^2}{1-Z}\right)dX = X\,dZ$$

$$\frac{1}{X}\,dX = \left(\frac{1-Z}{1+Z^2}\right)dZ$$

$$\frac{dX}{X} = \frac{dZ}{1+Z^2} - \frac{Z}{1+Z^2}$$

$$\ln|X| = \arctan Z + \frac{1}{2}\ln|1+Z^2| = C$$

$$\ln|X| - \arctan\frac{Y}{X} + \frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right| = C$$

$$\ln(x+2) - \arctan\frac{y-3}{x+2} + \frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{y-3}{x+2}\right)^2\right| = C$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(2x+3y+1)dx+(10x+15y+4)dy=0$

$\frac{2}{10}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\neq\frac{1}{4}$

المعادلة متوازية

$Z=2x+3y \Rightarrow dZ=2dx+3dy$

نعوض

$(Z+1)dx+(5Z+4)(dZ-2dx)=0$

$3Zdx+3dx+5ZdZ-10Zdx+4dZ-8dx=0$

$(-7Z-5)dx+(5Z+4)dZ=0$

نقسم على $-7Z-5\neq 0$

$dx+\left(\frac{5Z+4}{-7Z-5}\right)dZ$

$=dx-\frac{5Z+4}{7Z+5}dZ=0$

$7Z+5\overline{)\ 5Z+4\ \ (\frac{5}{7}}$

$\underline{5Z+\frac{25}{7}}$

$\frac{3}{7}$

$=dx-\left[\left(\frac{5}{7}+\frac{\frac{3}{7}}{7Z-5}\right)dZ\right]=0$

$x-\frac{5}{7}Z+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{7}Ln(7Z-5)=C$

$x-\frac{5}{7}(2x+3y)-\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{7}Ln(7(2x+3y)-5)$

$x-\frac{10}{7}x-\frac{15}{7}y-\frac{3}{49}Ln(14x+21y-5)=C$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

③ $(6x-4y+6)dx+(x-y-3)dy=0$

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \Rightarrow 6\neq 4$

المستقيمات متقاطعة

$\begin{cases} 6x-4y+6=0 \quad \cdots (1) \\ x-y-3=0 \quad \cdots (2) \end{cases}$

نضرب 2 بـ -4 ونجمع مع 1

$\Rightarrow$ نقطة التقاطع هي: $(-9,-12)$

نفرض $x=X-9, dx=dX$

$y=Y-12, dy=dY$

$(6X-54-4Y+48+6)dX+(X-9-Y+12-3)dY$

معادلة متجانسة نفرض $y=z.x \Rightarrow z=\frac{y}{x}$

$(6X-4Y)dX+(X-Y)dY$

$(6X-4XZ)dX+(X-XZ)(Xdz+Zdx)$

نقسم على X

$(6-4z)dX+(1-z)(Xdz+Zdx)=0$

$(6-4z+z-z^2)dX+(1-z)dz=0$

$(-z^2-3z+6)dx+X(1-z)dz=0$

$\frac{dx}{X}+\frac{1-z}{-z^2-3z+6}$

نفرق الكسر ونكامل ونصل إلى حل المعادلة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(5) $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$

معادلة متجانسة من الدرجة الثانية نفرض:

$Z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot Z \Rightarrow dy = x\,dZ + Z\,dx$

نقسم على x^2

$2Z\,dx + (x^2 - Z^2x^2)(x\,dZ + Z\,dx) = 0$

$(2Z + Z - Z^3)\,dx - (xZ^2)\,dZ = 0$

$\frac{1}{x}\,dx - \frac{Z^2}{3Z - Z^3}\,dZ = 0$

$\frac{1}{x} - \frac{Z}{3 - Z^2}\,dZ = 0$

$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|3 - Z^2| = \ln(c)$

$x\sqrt{3 - Z^2} = c \Rightarrow \boxed{\sqrt{3x^2 - Z^2} = c}$

(6) $\underbrace{e^{-y}\,dx}_{M} - \underbrace{(2y + xe^{-y})}_{N}\,dy$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^{-y}$ ، $\frac{\partial M}{\partial x} = -e^{-y}$

معادلة تامة

$(e^{-y}\,dx - xe^{-y}\,dy) - 2y\,dy = 0$

$\boxed{xe^{-y} - y^2 = c}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(6) $\underbrace{\frac{y}{x}}_{M}\,dx + \underbrace{(y^3 + \ln x)}_{N}\,dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{y}{x}\,dx + \ln x\,dy\right) + y^3\,dy = 0$$

$$\boxed{y\ln x + \frac{y^4}{4} + C}$$

(7) $2x(1+\sqrt{x^2-y})\,dx - \sqrt{x^2-y}\,dy = 0$

$$\frac{\partial M}{y} = \frac{-2x}{2\sqrt{x^2-y}}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{x^2-y}}$$

معادلة تامة

$$2x\,dx + 2x\sqrt{x^2-y}\,dx - \sqrt{x^2-y}\,dy$$

$$\int \sqrt{x^2-y} = (x^2-y)^{\frac{1}{2}} = \frac{(x^2-y)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\boxed{= x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-y)^3} = C}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

8). $(1+y^2\sin 2x)\,dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y\sin 2x$.

$\frac{\partial N}{\partial x} = -2\cos(x)\sin(x)(-2y) = 2y\sin 2x$.

$dx + y^2\sin 2x\,dx - 2y\cos^2 x\,dx$

$\boxed{x - y^2\cos^2(x) = c}$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة