كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية ١

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

المعادلات التفاضلية التي تحوّل إلى تامّة:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \quad \cdots (1)$$

إذا كانت المعادلة 1 غير تامّة أي إذا كان $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

عندما نضرب بالتابع $M(x,y)$ يمكن تحويلها إلى تامّة

ونسمّي التابع $M(x,y)$ عامل تكامل

$$M(x,y)M(x,y)dx+M(x,y)N(x,y)dy=0$$

وهكذا تصبح المعادلة تامّة ونكتب

$$\frac{\partial(MM)}{\partial y}=\frac{\partial(MN)}{\partial N}$$

وبالتالي يمكن تمييز الدالة

$$M\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial M}{dy}=M\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{N\partial M}{\partial x}$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية المجهول فيها M يحلّ

فتطرح إيجاد التابع M الذي يجعل المعادلة تامة قد يكون حلّا

أصعب من حلّ المعادلة المعطاة

$$M\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial M}{\partial x}-M\frac{\partial M}{\partial y} \quad \cdots (2)$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

لنا الآن وقفة نعتبر حالات خاصة لإيجاد عامل التكامل:

① عامل التكامل تابع لـ x فقط أي $M = M(x,y)$

$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x}$ و $\frac{\partial M}{\partial y} = 0$

$$N\frac{\partial M}{\partial x} = M\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial M}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx$$

الشرط اللازم والكافي لكي يكون μ عامل التكميل تابع فقط لـ x هو:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \psi(x)$$

$$\frac{\partial M}{M} = \psi(x)\,dx$$

$$\ln M = \int \psi(x)\,dx$$

$$M = C^{\int \psi(x)\,dx}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② عامل التكميل تابع فقط لـ y

$M = M(y)$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}$ و $\frac{\partial M}{\partial x} = 0$

$M\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -M\frac{\partial M}{\partial y}$

$\frac{\partial M}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} dy$

الشرط اللازم والكافي حتى يكون تابع التكميل تابع فقط لـ y هو:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \varphi(y)$$

③ عامل التكميل تابع لـ $W(x,y)$ ،

$M = M(W(x,y))$

$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{dM}{dW} \cdot \frac{\partial W}{\partial x}$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{dM}{dW} \cdot \frac{\partial W}{\partial y}$

$M\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{dM}{dW}\left(N\frac{\partial W}{\partial x} - M\frac{\partial W}{\partial y}\right)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial w}{\partial x} - M\frac{\partial w}{\partial y}}\, dw$$

شرط اللازم والكافي لكي يكون M تابع فقط لـ $x+y$ هو

$$\frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M}\, d(x+y).$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} = R(x+y)$$

ب. $w = x.y$

$$\frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}\, d(x.y)$$

ج. $w = x^2 + y^2$

$$\frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{2xN - 2yM}\, d(x^2+y^2).$$

مثال:

$$(x^3 + xy^4)dx + 2y^3 dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy^3 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy^3.$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{4xy^3}{2y^3} - 2x$$

$$M = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

$$(x^3 e^{x^2} + xy^4 e^{x^2})\,dx + (2y^3 e^{x^2})\,dy$$

نكامل ونحصل على حل المعادلة

مثال:

$$(y + xy^2)\,dx - x\,dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 1 + 2xy \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= -1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2 + 2xy$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-y(1+xy)} = \frac{2(1+xy)}{-y(1+xy)} = -\frac{2}{y}$$

$$M = \int -\frac{2}{y}\,dy = \frac{1}{y^2}$$

$$M = \rho$$

ونكمل الباقي بالضرب بـ ρ والمكاملة

تمرين وظيفة:

(1) $(x^2 - y^2 + 2x)\,dx + (x^2 - y^2 - 2y)\,dy = 0 \Rightarrow x + y$ عامل تكميلي

(2) $y(1+xy)\,dx + x(1-xy)\,dy = 0 \Rightarrow x - y$ تابع تكميلي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة:

عامل تكميلي المعادلة المتجانسة $M = \frac{1}{xM+yN}$

عامل تكميلي معادلة من الشكل

$$yf(x,y)dx + xg(x,y)dy = 0$$

$$M = \frac{1}{xM-yN}$$

المعادلات التفاضلية الخطية:

$y' = f(x,y)$ أو $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

شكل المعادلة يكون $y' + P(x)y = q(x)$ ... (1)

وكل معادلة من الشكل (1) هي معادلة خطية

(علاقة خطية في y, y')

إذا كانت $q(x) = 0$ في (1) فإن (1) تأخذ الشكل

$y' + P(x)y = 0$

متجانسة بدرجة طرفه الأيمن.

حل المعادلة التفاضلية الخطية:

- نرد إلى منفصلة المتغيرات

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln y = -\int P(x)dx + \ln(c)$$

$$y = c\, e^{-\int P(x)dx}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نظرية: أي حلّ للمعادلة التفاضلية الخطية (1) يكتب على الشكل

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

طريقة أولى للحلّ:

- طريقة تغيير الثابت (طريقة لاغرانج)
- نأخذ المعادلة المتجانسة

$$y' + P(x)y = 0$$

$$y_h = c\, e^{-\int P(x)\,dx}$$

نعتبر c تابع لـ x

$$y_p = c(x)\, e^{-\int P(x)\,dx}$$

نعوض في (1)

$$y'_p = c'(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} - P(x)\, c(x)\, e^{-\int P(x)\,dx}$$

بالتعويض:

$$y(x) = c'\, e^{-\int P(x)\,dx} - P(x)\, c(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} + P(x)\, c(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} = q(x)$$

$$c'(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} = q(x)$$

$$c'(x) = q(x)\, e^{+\int P(x)\,dx}$$

$$c(x) = \int q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}$$

$$y_p(x) = \int q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\,dx\; e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$y(x) = c\, e^{-\int P(x)\,dx} + e^{-\int P(x)\,dx} \int q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\,dx$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

طريقة ثانية للحل:

$$(P(x)y - q(x))dx + dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x), \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = P(x) - P(x)$$

$$N = 1$$

$$M = e^{\int P(x)\,dx}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z