



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثانية

المادة : معادلات تفاضلية ١

المحاضرة : الرابعة / نظري

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

الدكتور:

المحاضرة:

4 نظرية



القسم: الرياضيات

السنة: الثانية

المادة: معادلات تفاضلية 1

التاريخ: / /

A to Z Library for university services

المعادلات التفاضلية التي تتحول إلى متامة:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (1)$$

إذا كانت المعادلة غير متامة أي إذا كانت $\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x}$

عندها نضرب بالتابع $M(x,y)$ يمكن تحويلها إلى متامة

ونسمي التابع $M(x,y)$ عاملاً تكاملياً

$$M(x,y) M(x,y)dx + M(x,y) N(x,y)dy = 0$$

وهكذا أصبح المعادلة متامة ونكتب

$$\frac{\partial (M M)}{\partial y} = \frac{\partial (M N)}{\partial x}$$

وبذلك يمكن تعيين الدالة

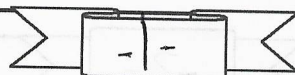
$$M \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{dM}{dy} = M \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial M}{\partial x}$$

وهذه معادلة تفاضلية جزئية المجهول فيها M فقط

فيمكن إيجاد التابع M الذي يجعل المعادلة متامة قد يكون صلاً

أصعب منه صلاً المعادلة المعقدة

$$M \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{\partial M}{\partial x} - M \frac{\partial M}{\partial y} \quad (2)$$



السؤال هو فيه نمشّر هالشيء فاجبة للإيجاد التكامل
عامله التكامل

(1) عامله التكامل تابع لـ x فقط أيع

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

$$N \frac{\partial M}{\partial x} = M \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial M}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx$$

الشيء اللازم والكاف لي يكون عامله التكامل
تابع فقط لـ x هو:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \psi(x)$$

$$\frac{\partial M}{M} = \psi(x) dx$$

$$\ln M = \int \psi(x) dx$$

$$\int \psi(x) dx$$

$$M = C$$

②. عامل التكميل تابع فقط لـ y .

$$M = M(y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial M}{\partial x} = 0$$

$$M \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = -M \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} dy$$

الشرط اللازم والكافي حتى يكونه تابع التكميل تابع فقط لـ y هو:

$$\left\{ \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \varphi(y) \right\}$$

③. عامل التكميل تابع لـ $W(x, y)$ ،
 $M = M(W(x, y))$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{dM}{dW} \cdot \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{dM}{dW} \cdot \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$M \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{dM}{dW} \left(N \frac{\partial W}{\partial x} - M \frac{\partial W}{\partial y} \right)$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N-M} dw$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{N \frac{\partial w}{\partial x} - M \frac{\partial w}{\partial y}}{N-M}$$

الشرط اللازم والكافي لكي يكون M تابعاً فقط لـ $x+y$ هو

$$\frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N-M} d(x+y)$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N-M} = R(x+y)$$

$$w = x \cdot y \quad (b)$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} d(xy)$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{2xN - 2yM} d(x^2y^2) \quad w = x^2 + y^2 \quad (c)$$

مثال

$$(x^3 + xy^4)dx + 2y^3dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy^3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = x^3$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = 6y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy^3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{4xy^3}{2y^3} - 2x$$

$$M = \int 2x dx = x^2$$

$$(x^3 e^{x^2} + xy^4 e^{x^2}) dx + (2y^3 e^{x^2}) dy$$

~~كل ما يلي من مسائل حلها بالحدود~~
 نأخذ من مسائل حلها بالحدود

$$(y + xy^2) dx - x dy = 0$$

مثال

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2 + 2xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2(1+xy)}{-y(1+xy)} = -\frac{2}{y}$$

$$M = \int -\frac{2}{y} dy = -\frac{2}{y}$$

$$M = P$$

من كتاب الخليل بالشرح في الحساب

تفسيره وظيفته

$$(1) (x^2 - y^2 + 2x) dx + (x^2 - y^2 - 2y) dy = 0 \Rightarrow x + y$$

$$(2) y(1+xy) dx + x(1-xy) dy = 0 \Rightarrow x - y$$

ملاحظة:

عامل تكاملية المعادلة المتجانسة

$$M = \frac{1}{xM + yN}$$

عامل تكاملية معادلة من الدرجة الأولى

$$y f(x, y) dx + x g(x, y) dy = 0$$

$$M = \frac{1}{xM - yN}$$

المعادلة التفاضلية الخطية

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad \text{و} \quad y' = f(x, y)$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها --- (1) $y' + P(x)y = Q(x)$

وكذلك ما دللنا عليه في الشكل (1) هي معادلة خطية

(علاقة خطية في y و y')إذا كانت $P = P(x)$ في (1) فإننا نكتب (1) تأخذ الشكل

$$y' + P(x)y = 0$$

متجانسة بدون طرفه ثابت

هذه المعادلة التفاضلية الخطية

تُحل بالمتغيرات المنفصلة

$$\frac{dy}{y} = -P(x) dx$$

$$\ln y = - \int P(x) dx + \ln(c)$$

$$y = c e^{-\int P(x) dx}$$

نظريته: أي حل للمعادلة التفاضلية الخطية (1) يكتب

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

على شكل

طريقة أولى للحل

طريقة تغيير الثابت (طريقة لاغرانج)

$$y' + P(x)y = 0$$

نأخذ للمعادلة المتجانسة

$$y_h = C e^{-\int P(x) dx}$$

نعتبر C تابعاً لـ x

$$y_p = C(x) e^{-\int P(x) dx} \quad (1)$$

$$y'_p = C'(x) e^{-\int P(x) dx} - P(x) C(x) e^{-\int P(x) dx}$$

$$y(x) = C e^{-\int P(x) dx} - P(x) C(x) e^{-\int P(x) dx} + P(x) C(x) e^{-\int P(x) dx} = q(x)$$

$$C'(x) e^{-\int P(x) dx} = q(x)$$

$$C'(x) = q(x) e^{+\int P(x) dx}$$

$$C(x) = \int q(x) e^{\int P(x) dx} dx$$

$$y_p(x) = \int q(x) e^{\int P(x) dx} dx e^{-\int P(x) dx}$$

~~y_h~~

$$y(x) = C e^{-\int P(x) dx} + e^{-\int P(x) dx} \int q(x) e^{\int P(x) dx} dx$$

طريقة ثانية للحل:

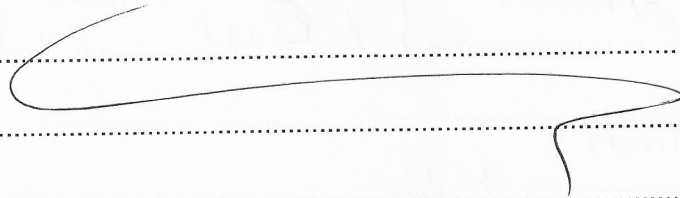
$$(P(x)y - q(x))dx + dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) = \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = P(x) - P(x)$$

$$N = \int P(x) dx$$

النتيجة النهائية





مكتبة
A to Z