كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية ١

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

مثال عن المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x-5y+5}{5x-y+1} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + (x-5y+5)dx + (5x-y+1)dy$$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{1}{5} \neq -5$$

المستقيمات متقاطعة

$$\begin{cases} x-5y+5=0 \\ 5x-y+1=0 \end{cases}$$

نحل المثلث ونجد نقطة التقاطع $(0,1)$.

نطبق دساتير الانتقال $x = X_0 + X,\ y = y_0 + Y$

$x = X \Rightarrow dx = dX$

$y = 1 + Y \Rightarrow dy = dY$

$$\frac{dy}{dx} + (X-5(1+Y)+5) + (5X-(1+Y)+1)dy$$

$$(X-5Y)dx + (5X-Y)dy = 0$$

نفرض $\frac{Z}{x} \Rightarrow y = Z.x$

TEL:0931497960 - مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس)

$dy = x\,dz + z\,dx$

$(x - 5xz)dx + (5x - x.z)x(x\,dz + z\,dx) = 0$

$x - xz^2 dx + (5 - z)x^2 dz = 0$

$x(1 - z^2)dx + (5 - z)x^2 dz = 0$

نقسم على $x^2(1 - z^2)dx$

$\frac{x}{x^2}dx + \frac{5 - z}{1 - z^2}dz = 0$

بتفريق الكسور نضل على

$\frac{x}{x^2}dx + \left(\frac{2}{1-z} + \frac{3}{1+z}\right)dz = 0$

بالمكاملة

$\ln|x| - 2\ln|1 - z| + 3\ln|1 + z| = \ln(c)$

$\ln\left|\frac{x(1+z)^3}{(1-z)^2}\right| = \ln c$

بالرفع للقوة e

$\frac{x(1+z)^3}{(1-z)^2} = c \Longrightarrow \frac{x\left(1 + \frac{y-1}{x}\right)^3}{\left(1 - \frac{y-1}{x}\right)^2} = c$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- المعادلات التفاضلية المتوازية:

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$
$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

في هذه الحالة نفرض $Z=a_1x+b_1y$

$$dZ=a_1dx+b_1dy$$

مثال:

$$(x+2y+3)dx-(3x+6y+7)dy=0$$
$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{3}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{2}{6}\neq\frac{c_1}{c_2}=\frac{3}{7}$$

معادلات متوازية غير متجانسة

$$Z=x+2y;\ dZ=dx+2dy$$
$$(Z+x)dx-\frac{1}{2}(3Z+7)(dz-dx)=0$$
$$\left(Z+3+\frac{3}{2}Z+\frac{7}{3}\right)dx-\frac{1}{2}(3Z+7)dZ$$

بالضرب بـ 2

$$(5Z+13)dx-(3Z+7)dZ$$
$$dx-\frac{3Z+7}{5Z+13}dZ=0$$

بإجراء القسمة الاقليدية للكسر:

$$x-\frac{3}{5}Z+\frac{4}{25}Ln(5Z+13)=C_1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$5x - 15y - 2\ln(5x + 10y + 13) = c$

المعادلات التفاضلية التامة:

تعريف: نقول عن المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ... (1) أنها تامة إذا وفقط إذا كان الطرف الأيسر يمثل تفاضلاً تاماً لتابع $\varphi(x,y)$ أي إذا وجد تابع

$$d\varphi = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$$

$$\varphi(x,y) = c$$

نظرية: الشرط اللازم والكافي لكي تكون المعادلة 1 تامة هو أن يكون $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

البرهان بالاتجاه الأول: نفرض أن المعادلة 1 تامة وبالتالي يوجد $\varphi(x,y)$ بحيث:

$$d\varphi = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$$

بالمقارنة نجد: $M(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ، $N(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبما أنّ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

البرهان بالاتجاه الثاني:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ولإثبات أنّ المعادلة تامّة نفرض أنّ:

$$\psi = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$$

لنتحقق أنّ ψ تابع فقط لـ y.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

ψ غير تابع لـ x.

$$\varphi(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \psi(y)\,dy$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + \psi(y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y) + N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y) + N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx = N(x,y)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$d\varphi = M dx + N dy$

بالتالي المعادلة تامة

مثال: حله المعادلة:

$(4x - 3y - y\sin x)dx + (\cos x - 3x - \sin y)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -3 - \sin x$

$\frac{\partial N}{\partial x} = -\sin x - 3$

المعادلة تامة لإيجاد حلّ هذه المعادلة نكتب بالشكل:

$M(x,y) = 4x - 3y - y\sin x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ——— ①

$N(x,y) = \cos x - 3x - \sin y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ——— ②

نكامل (1) جزئياً بالنسبة لـ x باعتبار y ثابتة

$\varphi(x,y) = 2x^2 - 3xy + y\cos x + \varphi(y)$

نكامل (2) جزئياً بالنسبة لـ y باعتبار x ثابتة

$\varphi(x,y) = y\cos x - 3xy + \cos y + \psi(x)$

بالمقارنة:

$\psi(x) = 2x^2$

$\varphi(y) = \cos y$

$\varphi(x,y) = 2x^2 - 3xy + y\cos x + \cos y \Rightarrow$

$2x^2 - 3xy + y\cos x + \cos y = c$

هو حلّ المعادلة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ط2: بالتفرقة إلى رمز.

$(4x\,dx)+(-\sin y\,dy)+(-3y\,dx-3x\,dy)+(-y\sin x\,dx+\cos x\,dy)=0$

$=2x^2+\cos y-3xy+y\cos x=c$

أمثلة وظيفة:

$(2y^2+4xy-x^2)dx+(2x^2+4xy-y^2)dy.$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة