كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٢٠٢٦

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مثال: ادرس خواص العملية * الثنائية * المعرّفة على مجموعة الأعداد الصحيحة بالشكل التالي:

$x * y = x.y - 5 \; ; \; \forall x, y \in \mathbb{Z}$

الحل:

1) * مغلقة إذا وفقط إذا $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x * y \in \mathbb{Z}$

لدينا $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x * y = x.y - 5$ ، $x \in \mathbb{Z}$ ، $y \in \mathbb{Z}$ ، $-5 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ * عملية مغلقة على عناصر $\mathbb{Z}$.

2) * تبديلية إذا وفقط إذا: $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x * y = y * x$

$x.y - 5 = y.x - 5 = y * x$

$\Rightarrow$ * عملية تبديلية على عناصر $\mathbb{Z}$.

3) * تجميعية

$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}$

$(x * y) * z = x * (y * z) \; ; \; \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.

لدينا $(x * y) * z = (x.y - 5) * z$

$= (x.y - 5).z - 5 = xyz - 5z - 5 \neq x * (y * z)$

$x * (y.z - 5) = x.(y.z - 5) - 5 = xy.z - 5x - 5$

وبالتالي العملية * ليست تجميعية على عناصر $\mathbb{Z}$.

العنصر الحيادي في $\mathbb{Z}$ بالنسبة لـ * إذا تحققت

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

تحقق الشرط: $\forall x \in Z : e * x = x \wedge x * e = x$

بفرض أن e العنصر الحيادي في Z بالنسبة لـ $*$

وبالتالي الشرط محقق.

$e * x = x ; \forall x \in Z$

$e \cdot x - 5 = x \Rightarrow ex = x + 5$

$e = \frac{x+5}{x}$

من أجل $x = 2$

$e = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} \notin Z$

من أجل $x = 4$ نجد أن:

$e = \frac{4+5}{4} = \frac{9}{4} \in Z$

من أجل $x = 5$ هذا أيضاً

$e = \frac{5+5}{5} = 2 \in Z$

والشرط محقق.

نلاحظ من أجل بعض القيم لـ x هو عنصر من Z ومن أجل بعض القيم x ليس عنصراً من Z بالتالي لا يوجد عنصر حيادي في Z بالنسبة لـ $*$ وبالتالي لا يوجد عنصر نظير في Z بالنسبة لـ $*$

مثال:

ادرس خواص العملية $*$ المعرفة على Z بالشكل التالي

$x * y = 3x + 4y ; \forall x, y \in Z$

الحل: $*$ مغلقة على عناصر Z لأنه:

$\forall x, y \in Z : x * y = 3x + 4y \in Z$

حيث $3x \in Z$ و $4y \in Z$ ومنه $*$ مغلقة على عناصر Z

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* تبديلية على عناصر $\mathbb{Z}$ إذا تحقق الشرط:

لدينا $\left.\begin{array}{l} x*y=3x+4y \\ y*x=3y+4x \end{array}\right\} \Rightarrow x*y \neq y*x$

$\Rightarrow$ * ليست تبديلية على عناصر $\mathbb{Z}$

* تجميعية على عناصر $\mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$T_1=(x*y)*z=(3x+4y)*z$

$=3(3x+4y)+4z=9x+12y+4z$

~~$T_2=x*(y*z)$~~

$T_2=x*(y*z)=x*(3y+4z)=x*(3y+4z)$

$=3x+4(3y+4z)=3x+12y+16z$

$T_1 \neq T_2$ $\Rightarrow$ * ليست تجميعية

وجود العنصر الحيادي:

عنصراً "حيادياً" في $\mathbb{Z}$ بالنسبة لـ * إذا تحقق الشرط

$\forall x \in \mathbb{Z}: e*x=x*e=x$

نفرض e عنصر حيادي في $\mathbb{Z}$ بالنسبة لـ * فإن الشرط التالي محقق

$e*x=x \Rightarrow 3e+4x=x \Rightarrow e=x-4x \Rightarrow e=-3x$

وبالتالي إذا عوضنا $e=-3x$ في الشرط $x*e=x$ يكون لدينا

$x*e=x*(-3x)=3x+4(-3x)=3x-12x=-9x \neq x$

بالتالي نلاحظ أن:

$e*x=x \neq x*e$

وبالتالي ليوجد عنصر حيادي في $\mathbb{Z}$ ~~بالنسبة~~

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لا يوجد عنصر حيادي في $\mathbb{Z}$ بالنسبة لـ $*$ بالتالي
لا يوجد عنصر نظير $\mathbb{Z}$ بالنسبة لـ $*$

الزمرة:

تعريفاً: نقول عن المجموعة غير الخالية G والمزودة بعملية الجبرية الثنائية $*$ أي نقول عن الثنائية $(G,*)$ أو اختصاراً " G أنها زمرة إذا حققت الشروط التالية:

1" $*$ عملية مغلقة على عناصر G أي:

~~$\forall x,y \in G \; x*y \in G$~~

$\forall x,y \in G : x*y \in G$

2" $*$ عملية تجميعية على عناصر G أي:

$\forall x,y,z \in G : (x*y)*z = x*(y*z)$

3" وجود العنصر الحيادي في G بالنسبة لـ $*$ يوجد في G عنصر حيادي e بالنسبة لـ $*$ يحقق الشرطين

$e*x = x \quad \forall x \in G$
$x*e = x$

رياضياً نكتب

$\exists e \in G ; \forall x \in G : e*x = x \; (1) \wedge x*e = x$ (2)

وجود العنصر النظير (المقلوب):

لكل عنصر x في G نظير (مقلوب) هو x' منه G بالنسبة لـ $*$ يحقق الشرطين

$x*x' = e \wedge x'*x = e$

يفرض في العنصر الحيادي في G بالنسبة لـ $*$ يحقق الشرطين

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall x \in G \; \exists x' \in G \; , \; x * x' = e \wedge x' * x = e$

ملاحظة هامة: إذا كانت $(G,*)$ زمرة "اختصاراً" زمرة ما حيث $G \neq \varphi$ وكانت $*$ عملية تبديلية على عناصر G أي تحقق الشرط

$\forall x,y \in G \; , \; x * y = y * x$

وفي هذه الحالة نقول أن الزمرة G تبديلية أو آبلية

ملاحظة هامة في التطبيقات العملية:

إن G زمرة بالنسبة لـ $*$ نبرهن الشروط التالية

"1": $G \neq \varphi$

"2": $*$ مغلقة على عناصر G

"3": $*$ تجميعية على عناصر G

"4": يوجد عنصر حيادي في G بالنسبة لـ $*$

"5": يوجد لكل عنصر منه G نظير في G بالنسبة لـ $*$

ملاحظة: إذا كانت $*$ تبديلية وكان المطلوب برهان أن G زمرة بالنسبة لـ $*$

عند برهانه وجود العنصر الحيادي أو النظير نكتفي ببرهان شرط واحد من شرطين.

مثال:

أثبت أن $(Z,*)$ زمرة تبديلية حيث أن Z مجموعة الأعداد الصحيحة و $*$ عملية جبرية معرفة على Z بالشكل التالي: $x * y = x + y - 6 \; ; \; \forall x,y \in Z$

حيث $+$ عملية الجمع العادية المعرفة على Z

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: نثبت شروط الزمرة:

1) إثبات $\mathbb{Z}+\varphi$ مسبب تعريف.

2) $*$ مغلقة على عناصر $\mathbb{Z}$ لأنه

$\forall x,y\in\mathbb{Z}: x*y=x+y-6\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}, -6\in\mathbb{Z}$

3) $*$ تجميعية على عناصر $\mathbb{Z}$ لأنه

$\forall x,y,z\in\mathbb{Z}: (x*y)*z=(x+y-6)*z=(x+y-6)+z-6$

$=x+(y+z-6)=x*(y+z-6)=x*(y*z)$

أو بطريقة أخرى

$T_1=(x*y)*z=(x+y-6)*z$

$=(x+y-6)+z-6=x+y+z-12$

$T_2=x*(y*z)=x*(y+z-6)=x+(y+z-6)-6=x+y+z-12$

4) وجود العنصر الحيادي:

نحسب العنصر الحيادي e:

e عنصر حيادي:

$x*e=x \Rightarrow x+e-6=x \Rightarrow e=6$

الجواب الأساسي (يكتب في الامتحان):

إن العنصر $e-6$ هو العنصر الحيادي في $\mathbb{Z}$ بالنسبة لـ $*$ لأنه من جهة أولى فإن: $e-6\in\mathbb{Z}$

ومن جهة ثانية فإن $e=6$

تحقق:

$e*x=6*x=6+x-6=x$

$x*e=x*6=x+6-6=x$

5) وجود المنظر النظير في $\mathbb{Z}$ بالنسبة لـ $*$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نحسب العنصر النظير للعنصر الكيفي x من Z بالنسبة لـ *

نفرض x' العنصر النظير لـ x يحقق الشرط:

$x*x'=e \Rightarrow x*x'=6 \Rightarrow x+x'-6=6 \Rightarrow x'=12-x$

من أجل كل عنصر x من Z فإن العنصر $x'=12-x$ هو نظير x في Z بالنسبة لـ * لأنه من جهة أخرى فإن:

$x' = 12-x \in Z$

ومن جهة أخرى فإن:

$x'*x = (12-x)*x = (12-x)+x-6 = 6-6 = e$

$x*x' = x*(12-x) = x+(12-x)-6 = 6-6 = e$

نلاحظ من (1)، (2)، (3)، (4)، (5) أن $(Z,*)$ زمرة.

الآن لنبرهن أن * تبديلية:

$x*y = x+y-6 = y+x-6$

$= y*x \quad \forall x,y \in Z$

بالتالي * تبديلية على عناصر Z إذاً الزمرة $(Z,*)$ زمرة تبديلية

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة