كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي١

المحاضرة : الثالثة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السؤال الأول:

أثبت أنه إذا كانت السلسلة $\{z_n\}$ يوجد لها نهاية a أي $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ فإن $\{|z_n|\}$ يوجد لها نهاية تساوي $|a|$ أي $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |a|$

الحل:

لإثبات أن $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |a|$ يجب إثبات:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}; \; n > N \Rightarrow$$

$$||z_n| - |a|| < \varepsilon$$

بما أن $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ هذا يعني أنه

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}; \; n > N \; \& \; |z_n - a| < \varepsilon$$

لدينا المتراجحة:

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

بالتالي:

$$||z_n| - |a|| \leq |z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$||z_n| - |a|| < \varepsilon \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

وهو المطلوب.

السؤال الثاني: ليكن:

$$x_n = 1 + \rho \cos\alpha + \rho^2 \cos 2\alpha + \dots + \rho^n \cos n\alpha$$

حيث $0 < \rho < 1$ ، $n \in \mathbb{N}$

أوجد $\lim_{n\to\infty} x_n$

فكرة الحل: لنشأ متتالية مركبة $z_n = x_n + i y_n$ بحيث y_n إجابة السؤال ثم نأخذ $\lim_{n\to\infty} z_n$ ومنه نستنتج نأخذ $\lim_{n\to\infty} Re$ (الجواب)

الحل:

لنضع: $y_n = \rho \sin\alpha + \rho^2 \sin 2\alpha + \dots + \rho^n \sin n\alpha$

ولنتظر في تقارب السلسلة: $z_n = x_n + i y_n$

$= 1 + \rho\cos\alpha + \rho^2 \cos 2\alpha + \dots + \rho^n \cos n\alpha + i(\rho \sin\alpha + \rho^2 \sin 2\alpha + \dots + \rho^n \sin n\alpha)$

$= 1 + \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) + \rho^2(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) + \dots + \rho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$

لنفرض: $\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = t$

حيث $0 < |t| = \rho < 1$

لنعوض: سلسلة هندسية

$$z_n = 1 + t + t^2 + \dots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$$

هندسية

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - t^{n+1}}{1-t} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - t^n \cdot t}{1-t} = \frac{1}{1-t}$$

ومنه يكون:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Re\left(\frac{1}{1-t}\right) = \lim_{n\to\infty} Re\left(\frac{1}{1 - \rho\cos\alpha + i\rho\sin\alpha}\right)$$

$$= \frac{1 - \rho\cos\alpha}{(1-\rho\cos\alpha)^2 + \rho^2 \sin^2\alpha} = \frac{1 - \rho\cos\alpha}{1 - 2\rho\cos\alpha + \rho^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

السؤال الثالث:

أثبت أنّ $w = z^2$ مستمرة من أجل أي $z \in \mathbb{C}$

الحل:

من أجل أي $\varepsilon > 0$ وأي نقطة z_0 فإنّ $f(z_0) = z_0^2$

ولنثبت أنّه يوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث:

$$|f(z) - f(z_0)|^2 < \varepsilon$$
$$|z - z_0| < \delta$$

لدينا $z \to z_0$ هذا يعني أنّه يوجد عدد حقيقي موجب $M > 0$

نختار نعم $\begin{cases} |z| < M \\ |z_0| < M \end{cases}$

$$|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| = |(z + z_0)(z - z_0)|$$
$$< (|z| + |z_0|)(z - z_0)|$$
$$< 2M|z - z_0|$$

عندئذٍ يوجد لكل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ بحيث إذا كانت: $|z - z_0| < \delta$ فإنّ:

$$|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| < 2M\delta = 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

السؤال الرابع:

أوجد قيمة النهاية:

① $$\lim_{z \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2z}{\text{Chi}\, z + i\, \text{Shi}\, z}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \lim_{z \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\cos z - \sin z} = \lim_{z \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos z - \sin z)(\cos z + \sin z)}{\cos z - \sin z}$$

$$= \lim_{z \to \frac{\pi}{4}} (\cos z + \sin z) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

[2] $$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{\sinh z} = \lim \frac{\sin z}{i \sin z} = \frac{1}{i}$$

[3] $$\lim_{z \to -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^{z} + 1}$$

$$= \frac{e^{2\left(-i\frac{\pi}{2}\right)} + 1}{e^{-i\frac{\pi}{2}} + 1} = \frac{e^{-i\pi} + 1}{e^{-i\frac{\pi}{2}} + 1}$$

$$= \frac{\cos \pi - i \sin \pi + 1}{\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} + 1} = \frac{-1 + 1}{0 - i + 1} = 0$$

[4] $$\lim_{z \to -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}$$ وظيفة

السؤال الخامس:

أثبت أن الدوال التالية معرفة على كامل الفضاء العقدي:

[1] $f(z) = Re(z)$

[2] $f(z) = Im(z)$

[3] $f(z) = \overline{z}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

① + ② : الشكل الجبري للعدد العقدي z هو $z = x + iy$

حيث x عدد حقيقي و y عدد حقيقي وبما أن مجموعة الأعداد الحقيقية تشمل جميع الأعداد التي يمكن تمثيلها على خط الأعداد فإن القسم الحقيقي والقسم التخيلي أعداد حقيقية معرفة على كامل الفضاء العقدي.

③ بنفس الطريقة.

وظيفية: أثبت أن $\lim_{z \to 1} \frac{2z+1}{z+2} = 1$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة