كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي١

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

سلاسل الأعداد العقدية:

تعريف: لتكن لدينا السلسلة $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ من الأعداد العقدية $z_1, z_2, \dots$ عندئذٍ فإننا نسمّي العدد العقدي α نهاية السلسلة $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) ; \ n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - \alpha| < \varepsilon$$

نفرض أن النهاية هي α: $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$

يمكن تجزئة السلسلة العقدية $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ إلى سلسلتين حقيقيتين $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ حيث: $z_n = x_n + i y_n$

نظرية: السلسلة $\{z_n = x_n + i y_n\}$ تتقارب من العدد العقدي $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha_1 \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \alpha_2$$

تعريف: نقول عن السلسلة العقدية $\{z_n\}$ إنها محدودة إذا وجد عدد موجب M بحيث يحقق $|z_n| < M$ من حدود السلسلة

نظرية: كل سلسلة متقاربة تكون محدودة.

خواص نهايات السلاسل العقدية:

إذا كانت: $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ ، $\lim_{n\to\infty} w_n = b$

عندئذٍ:

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

① $\lim_{n\to\infty}(a_n \mp z_n) = b \mp a$

② $\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot a_n) = b \cdot a$

③ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{z_n}{a_n}\right)_{\substack{a_n\neq 0\\ b\neq 0}} = \frac{a}{b}$

مثال: أثبت أن المتتالية $z_n = \frac{n-i}{n+1}$ حيث $n=1,2,\dots$ لها نهاية $a=1$

الحل: $|z_n - a| = \left|\frac{n-i}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-i-1}{n+1}\right| = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

متى تكون المتتالية متقاربة: $\frac{\sqrt{2}}{n+1} < \varepsilon$

$\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} < n+1 \Rightarrow n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1$

وبالتالي يوجد $N(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1$ و $|z_n - 1| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 1$

تمرين: أثبت أنه إذا كانت المتتالية $\{z_n\}$ نهايتها α (أي $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$) فإن المتتالية $\{|z_n|\}$ لها نهاية $|\alpha|$ أي $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |\alpha|$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ا. مرهُ الكافي لتقارب سلسلة من الأعداد العقدية:

ليكن $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ حيث $|z_n| = \rho_n$

$\theta_n = \arg z_n$

عندئذٍ إذا كان $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \rho_0$ و $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta_0$

فإنَّ: $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$

مثال: أثبت أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

حيث $z = x + iy$

الحل: نضع $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ ونثبت أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| \overset{?}{=} e^x \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \arg z_n = y$$

$$|z_n| = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = \left|1 + \frac{x+iy}{n}\right|^n = \left|\left(1 + \frac{x}{n}\right) + i\left(\frac{y}{n}\right)\right|^n$$

$$= \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} = \left[1 + \frac{x^2 + y^2 + 2x_n}{n^2}\right]^{n/2}$$

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{2x_n}{n^2} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right]^{n/2}$$

(نهاية معرفة) $\frac{2x_n}{n^2}$, $\frac{x^2+y^2}{n^2} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |z_n| = e^x$$

قانون

$$\arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \arg tg \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = \text{arc}\, tg \frac{y}{n+x}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\theta_n = \arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = n\arg tg\frac{y}{n+x}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\theta_n = y$$

لعد البسط على المقام نحصل على $\frac{y}{n+x}$

وبالتالي بشرط الاكتفاء بمتتابعة الدالة:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \rho_n e^{i\lim_{n\to\infty}\theta_n} = e^x e^{iy} = e^z$$

السلسلة $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ متباعدة حيث $z_n = \arg\frac{(-1)^n}{n}$ $n=1,2,\dots$ ✗

لأن:

$$\arg\frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & ; n \text{ عدد زوجي} \\ \pi & ; n \text{ عدد فردي} \end{cases}$$

تمرين: ليكن $x_n = 1+\rho\cos\alpha+\rho^2\cos 2\alpha+\dots+\rho^n\cos n\alpha$

حيث $0<\rho<1$ ، $n\in\mathbb{N}$ ، أوجد $\lim_{n\to\infty} x_n$

تعريف: جوار النقطة z_0 هي مجموعة الأعداد العقدية z والتي تحقق أنّ $|z-z_0|<\varepsilon$ أي هي مجموعة النقاط التي تقع داخل الدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها $\varepsilon>0$

تعريف: لتكن الدالة $f(z)$ معرفة على Ω (جوار النقطة z_0) عندئذٍ يسمّى $A\in\mathbb{C}$ نهاية الدالة $f(z)$ في النقطة z_0 إذا تحقق أنّه من أجل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ من أجل جميع نقاط $z\in\Omega$ تحقق الشرط:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$0 < |z - z_0| < \delta$; $z, z_0 \in \mathbb{C}$

بالتالي فإنّ المتراجحة التالية محققة : $|f(z) - A| < \varepsilon$

و في هذه الحالة نكتب : $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$

بالإضافة إلى ذلك فإنّه إذا كانت : $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ و كانت $z_0 = x_0 + i y_0$ إذا وجدت

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = \alpha \quad , \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = \beta$$

بالتالي :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) + i \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = \alpha + i\beta$$

ليكن :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \qquad \lim_{z \to z_0} g(z) = B$$

بالتالي :

① $\lim_{z \to z_0} [g(z) + f(z)] = B + A$

② $\lim_{z \to z_0} [g(z) \cdot f(z)] = A \cdot B$

③ $\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] \begin{pmatrix} g(z) \neq 0 \\ B \neq 0 \end{pmatrix} = \frac{A}{B}$

تعريف : نقول عن الدالة $f(z)$ المعرفة على $D \subset \mathbb{C}$ أنّها مستمرة في النقطة $z_0 \in D$ إذا تحقق :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بعبارة أخرى الدالة $f(z)$ مستمرة في النقطة z_0 إذا تحقق أنّه من أجل أي $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ وتحقق أنّه من أجل أي $z \in D$ فإنّ $|z - z_0| < \delta$ وبالتالي $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

* من أجل استمرار الدالة العقدية: $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ في النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ يلزم ويكفي أن تكون الدالتان u, v مستمرة معاً في (x_0, y_0)

- نقول إن الدالة $f(z)$ مستمرة على مجال تعريفها إذا كانت مستمرة على كل نقطة من هذا المجال.

* مجموع الدالتين العقديتين $f(z), g(z)$ المستمرتين على المجال D هي دالة مستمرة على D وأيضاً $\frac{f(z)}{g(z)}$ مستمرة على D حيث $g(z) \neq 0$

* إذا كانت $f(z)$ مستمرة في النقطة z_0 والدالة $F(z)$ مستمرة في النقطة $t_0 = f(z_0)$ فإنّ التركيب $F[f(z)]$ مستمر في النقطة z_0

مثال: لتكن w دالة خطية: $w = f(z) = az + b$ حيث a, b أعداد عقدية ثابتة. لنثبت أن w مستمرة في النقطة z_0 وليكن $w_0 = az_0 + b$ حيث $a \neq 0$

الحل:

$$|w - w_0| = |f(z) - f(z_0)| =$$
$$= |az + b - az_0 - b| = |a(z - z_0)|$$
$$= |a|\,|z - z_0|$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$; $a \neq 0$

وبحيث : $0 < |z - z_0| < \delta$ وبالتالي :

$|w - w_0| = |a|\,|z - z_0| < |a| \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$

تمرين: لتكن z_0 كيفية من $\mathbb{C}$ وبالتالي $w = f(z)$ مستمرة على كامل المجال $\mathbb{C}$

شروط كوشي ريمان:

لتكن الدالة $w = f(z)$ معرفة على المجال $D \subseteq \mathbb{C}$ ولتكن z و $z + \Delta z$ تنتميان إلى D ولنعرف :

$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$; $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

عندئذٍ الدالة $f(z)$ تكون قابلة للاشتقاق إذا كانت $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ تملك نهاية عندما $\Delta z \to 0$ وهذه النهاية نسميها مشتق دالة $f(z)$ ونرمز لها :

$w' = f'(z) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$

إذا كانت $z = x + iy$ و $f(z) = u + iv$ عندئذٍ في كل نقطة z الدالة $f(z)$ قابلة للاشتقاق إذا تحقق :

نسميها شروط كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: نقول عن الدالة $f(z)$ إنها تحليلية في النقطة $z \in D$ إذا كانت قابلة للاشتقاق في النقطة z وفي جوارها.

* الدالة $f(z)$ تحليلية على D إذا كانت تحليلية في كل نقطة $z \in D$

- من أجل أي دالة تحليلية فإنّ:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

مثال: بيّن أنّ الدالة $w = e^z$ تحليلية على كامل الفضاء العقدي

الحل: $w = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$

$$= e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = e^x \cos y$$

$$v(x,y) = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \;,\; \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \;,\; \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

الشرط الأول تحقق.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y$$

وبالتالي e^z قابلة للاشتقاق على كامل الفضاء $\mathbb{C}$ وتحقق شرطي كوشي ريمان فهي دالة تحليلية.

مثال هل الدالة $w = z.\bar{z}$ تحليلية أم لا مع إيجاد المشتقة

$$w = x^2 + y^2 \quad ; \quad u = x^2 + y^2$$

$$v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \neq \frac{-\partial u}{\partial y} \Rightarrow 2x \neq 0$$

والدالة غير تحليلية.

* ملاحظة شرطي كوشي ريمان يمكن معرفة الدالة التحليلية إذا عُرف الجزء الحقيقي $u(x,y)$ أو الجزء التخيلي $v(x,y)$ بالإضافة لذلك الدالة $f(z)$ التحليلية في جوار النقطة z_0 يمكن كتابتها بالشكل:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2} , \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - \bar{C}_0$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2} , \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) + \bar{C}_0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حيث C_0 مرافق العدد العقدي $C_0 = f(z_0)$

$\bar{z}_0$ مرافق العدد العقدي z_0

مثال: أوجد الدالة التحليلية $w = f(z)$ والتي قسمها الحقيقي $u(x,y) = 2e^x \cos y$ وتحقق $f(0) = 2$

الحل:

$$z_0 = 0 \Rightarrow \bar{z}_0 = 0$$

$$C_0 = 2 \Rightarrow \bar{C}_0 = 2$$

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - 2 = 2\left(2e^{\frac{z}{2}} \cos\left(\frac{z}{2i}\right)\right) - 2$$

$$= 4e^{\frac{z}{2}} \cos\left(\frac{z}{2i}\right) - 2 = 4e^{\frac{z}{2}} \cos\left(-i\frac{z}{2}\right) - 2$$

$$= 4e^{\frac{z}{2}} \cosh\left(\frac{z}{2}\right) - 2 = 2e^{z}$$

طريقة ثانية:

$$u = 2e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow$$

$$v = \int 2e^x \cos y \, dy + \phi(x)$$

$$v = 2e^x \sin y + \phi(x)$$

بالمشتقة بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^x \sin y + \phi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\phi'(x) = 0 \Rightarrow \phi(x) = C$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f(0) = 2$ ⟸ C بما أن

$\Rightarrow u_x(0,0) + i v_x(0,0) = 2$

$2 + iC = 2 + i0 \Rightarrow \boxed{C = 0}$

$\Rightarrow v = 2e^x \sin y$

$\Rightarrow f(z) = 2e^z$ (بما المطلوب)

مثال: $v = 3x + 2xy$

$f(-i) = 2$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة