كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك١

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

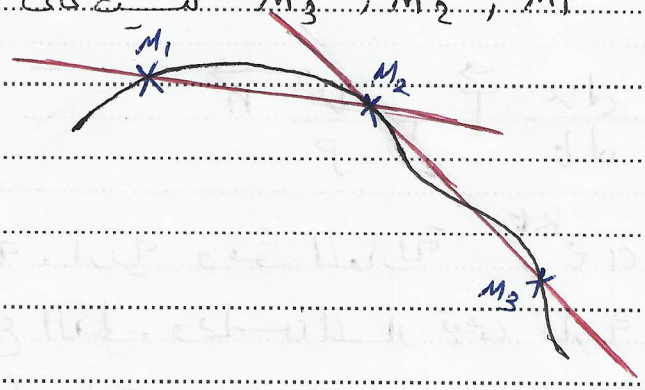
2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السرعة والتسارع بالاحداثيات الذاتية:

وجدنا أن التسارع يقطن على الناظم وعلى الماس في الحركة الدائرية.

إذا تحركت نقطة M على مسار ما فإن M تمر في مواضع على هذا المسار M_1, M_2, M_3 لست على استقامة واحدة.



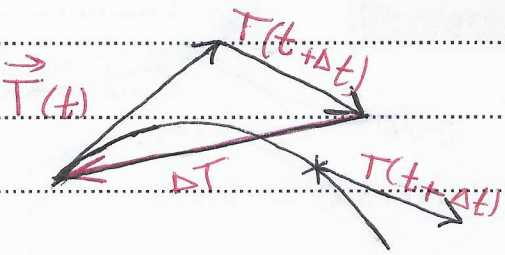
اقترب M_2, M_3 من M_1 يشكل لدينا مماسين M_1M_2 و M_2M_3 وبما أن النقط ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي في M_1 يدعى الملاصق.

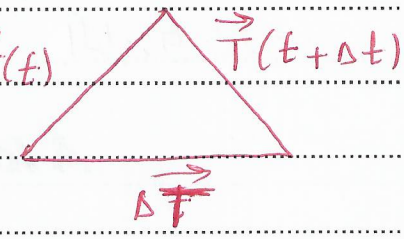
يصبح لدينا ثلاث أشعة واحدة هي $\vec{T}, \vec{n}, \vec{b}$ تشكل الاحداثيات الذاتية، ويصبح

$$\vec{v} = v\vec{T}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt}$$

كيف يتم اشتقاق شعاع الواحدة المماس $\vec{T}$:





$$|\Delta\vec{T}| = 2\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) \approx \Delta\alpha \Rightarrow \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\vec{n} = \frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\vec{n} = \frac{d\alpha}{ds}\cdot v\vec{n}$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

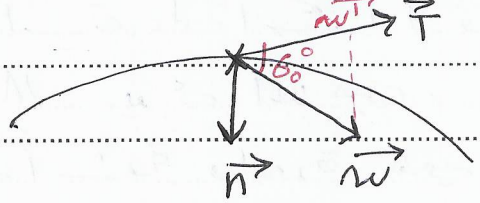
$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

مثال: تحرك نقطة مادية وفق المعادلة $S = ae^{kt}$

الزاوية بين الذراع الكلي ومحاسب المسار تبقى ثابتة $60°$.

- أوجد سرعة النقطة وتسارعاتها
- استنتج نصف قطر تقوس المسار.

الحل:



$$v = \frac{ds}{dt}\vec{T} = ake^{kt}\vec{T} \Rightarrow \boxed{v = ake^{kt}}$$

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\vec{T} = ak^2e^{kT}\vec{T}$$

$$\cos(60°) = \frac{\vec{a}\,\vec{T}}{a} \Rightarrow$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$w = 2ak^2 e^{kt} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

$$\Rightarrow 4a^2k^4 e^{2kT} = a^2k^4 e^{2kT} + \frac{ak^4 e^{4kt}}{\rho^2}$$

$$3a^2k^4 e^{2kt} = \frac{a^4k^4 e^{4kt}}{v^2}$$

$$\rho^2 = \frac{a^2}{3} e^{2kt} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{a}{\sqrt{3}} e^{kt}}$$

$$\Rightarrow \vec{w}_{\vec{n}} = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$$

مثال: تجري باخرة على قوس دائرة، نصف قطرها R تغيرت السرعة خلال 20 ثانية من 15 إلى 12 متر في الثانية.

إذا علمت أن الذراع الحامي يناسب طرداً مع مربع سرعتها: أوجد طول الطريق المقطوع خلال العشر ثوان الأولى وزاوية الدوران، في اللحظة $t=0$ كان $v=0$

الحل:

$$S = \int_0^{10} v\,dt \quad ; \quad v = w.R$$

$$w = \frac{d\alpha}{dt}$$

الذراع الحامي يناسب طرداً مع مربع السرعة:

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = kv^2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\int_{15}^{12} \frac{dv}{v^2} = \int_0^{20} k\,dt \Rightarrow k = \frac{-1}{1200}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-1}{1200} v^2$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = \int_0^t \frac{-1}{1200}\,dt \Rightarrow \left[\frac{-1}{v}\right]_{v_0}^{v} = \left[\frac{-1}{1200} t\right]_0^t \Rightarrow$$

$$\frac{-1}{v} + \frac{1}{v_0} = \frac{-1}{1200} t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{t}{1200} + \frac{1}{v_0} = \frac{1200 + t v_0}{1200 v_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{1200 v_0}{1200 + t v_0}$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{10} v\,dt = 1200 v_0 \int_0^{10} \frac{dt}{1200 + t v_0}$$

$$= 1200 \left[\ln(1200 + t v_0)\right]_0^{10} = 1200 \ln\left(\frac{1200 + 10 v_0}{1200}\right)$$

$$= 1200 \ln\left(\frac{1350}{1200}\right)$$

$S = C_e \cdot R$

$C_e = \frac{S}{R}$

في حركة من 0 إلى 20 ثانية انتقلت السرعة من 12 إلى 15

$\Leftarrow t = 0 \Leftarrow 12$ إلى 15

$v = v_0 = 15$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z