كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الرابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف: اندومرفيزم الحلقات: هو هومومورفيزم حلقية بداية
انطلاقاً من حلقة ما على نفس الحلقة:
$End(\mathbb{R}) = Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

تعريف: اندومرفيزم الزمر: هو اندومرفيزم حلقة بداية على حلقة ما.

السؤال الأول:

1) لتكن $\mathbb{Z}^+$ زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع أي $\mathbb{Z}^+ = (\mathbb{Z}, +)$ أثبت أن $End(\mathbb{Z}^+) \cong \mathbb{Z}$

أي أثبت أن مجموعة الاندومرفيزمات على زمرة الأعداد الصحيحة المزودة بعملية الجمع اندومرفيزمية مع حلقة الأعداد الصحيحة

الحل:

أولاً: نعرف التطبيق $t_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ بالعلاقة:
$t_n(x) = nx$ إن t_n معرف جيداً وواضحاً لكل $n \in \mathbb{Z}$
لنبرهن أن t_n هومومرفيزم ولنبرهن ذلك
$\forall x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t_n(x+y) = n(x+y) = nx + ny$
$t_n(x+y) = t_n(x) + t_n(y)$
$\Rightarrow t_n \in End(\mathbb{Z}^+)$
لأن t_n هومومرفيزم أي على $\mathbb{Z}^+$ مطلقاً نفسها متغيرة

ثانياً:

لنبرهن أن $t_{n+m} = t_m + t_n$

لدينا:

$t_{n+m}(x) = (n+m)x = nx + mx = t_n(x) + t_m(x)$

$t_{n+m}(x) = t_n(x) + t_m(x)$

- لنبرهن أن $t_{n.m} = t_n \circ t_m$

لدينا: $t_{n.m}(x) = n.m(x) = n(mx) = t_n \circ t_m(x)$

- ثالثاً: نعرف التطبيق $f: \mathbb{Z} \to End(\mathbb{Z}^+)$

$f_{\mathbb{R}}(n) = t_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

لنبرهن أن f هومومورفيزم حلقات:

$f(n+m) = t_{n+m} = t_n + t_m = f(n) + f(m)$

$f(n.m) = t_{n.m} = t_n \circ t_m = f_{\mathbb{R}}(n) \circ f(m)$

وبالتالي f هومومورفيزم حلقات.

- f غامر: لتكن $\alpha \in End(\mathbb{Z}^+)$ أندومورفيزماً كيفياً على $\mathbb{Z}^+$ حيث $\alpha(1) = k$ من أجل عدد صحيح نسبي $x \in \mathbb{Z}$

لدينا:

$\alpha(x) = \alpha(\underbrace{1+1+\dots+1}_{x \text{ مرة}}) = \underbrace{\alpha(1) + \alpha(1) + \dots + \alpha(1)}_{x \text{ مرة}}$

$\alpha(x) = kx = t_k(x) \Rightarrow \alpha = t_k \Rightarrow \alpha = f(k)$

من أجل x عدد صالح نضع $y = x$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\theta(x) = \theta(-y) = -ky = k(-y) = kx = t_k(x)$

$\Rightarrow \theta = t_k \Rightarrow \theta = f(k)$

إذا كان $x = 0$ فإنّ: $\theta(x=0) \Leftarrow \theta(x) = k \cdot 0 = t_k(x)$

إذاً في جميع الحالات نجد أنّ $\theta = t_k$ وبالتالي $\theta = f(k)$

وبالتالي f غامر.

f متباين:

ليكن $f(n) = f(m)$ عندئذٍ فإنّ:

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad t_m(x) = t_n(x) \Rightarrow m(x) = n(x)$

بشكل خاص:

$t_m(1) = t_n(1) \Rightarrow m.1 = n.1 \Rightarrow m = n$

$\Leftarrow f$ متباين.

وبالتالي f هو تشاكل حلقات غامر ومتباين بالتالي

f أيزومرفيزم وبنية فإنّ: $End(\mathbb{Z}^+) \cong \mathbb{Z}$

السؤال الثاني:

أثبت أنّ $f: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_5$ المعرفة بالعلاقة:

$f(\bar{a}) = 5\bar{a} \quad \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_6$

أنّه هو تشاكل حلقات.

الحل:

f معرفة جيداً لأنّ:

$\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$

يكفي $\bar{a} = \bar{b}$

$\Rightarrow \bar{a} = \bar{b} \Rightarrow 6 \mid a-b \Rightarrow a = b + 6k$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$5a = 5b + 3ak \Rightarrow 5\bar{a} = 5\bar{b}$

$\Rightarrow f(\bar{a}) = f(\bar{b})$

بينه f معرف جيداً.

$f(\bar{a}+\bar{b}) = 5(\bar{a}+\bar{b}) = 5\bar{a} + 5\bar{b} \Rightarrow$

$f(\bar{a}+\bar{b}) = f(\bar{a}) + f(\bar{b})$

$f(\bar{a}.\bar{b}) = f(\overline{a.b}) = 5(\overline{ab}) = 25(ab)$

$f(\bar{a}.\bar{b}) = (5\bar{a})(5\bar{b}) = f(\bar{a}).f(\bar{b})$

$\Rightarrow f(\bar{a}.\bar{b}) = f(\bar{a}).f(\bar{b})$

بينه f هومومرفيزم حلقات.

انتهت المحاضرة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z