كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الثالثة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

11 ليكن F حقلاً و $T^n(F)$ حلقة المصفوفات المثلثية العليا من الدرجة n على F و $ST^n(F)$ مصفوفة مثلثية عليا تماماً عندئذٍ $ST^n(F)$ إيديال في $T^n(F)$ ويتحقق لدينا مايلي:

$$T^n(F)/ST^n(F) \cong D_n(F)$$

حيث $D_n(F)$ حلقة المصفوفات النظرية بعناصر من F.

الإثبات:

نعرف أولاً المصفوفة المثلثية العليا تماماً فإنها مصفوفة مثلثية عليا عناصر قطرها الرئيسي تساوي الصفر الموجودة في الحقل F

أولاً: $ST^n(F)$ هي زمرة جزئية من $T^n(F)$

$$T^n(F)=\{A\in M_n(F): a_{ij}=0 \quad \forall\ i>j\}$$

$$ST^n(F)=\{A\in M_n(F): a_{ij}=0 \quad \forall\ i\geq j\}$$

- إن حيادي جمع المصفوفات هو المصفوفة الصفرية
- النظير الجمعي لمصفوفة هو المصفوفة التي تحقق:

$$-A=(-a_{ij}) \quad \forall\ 1\leq i,j\leq n$$

$$\forall C,D\in ST^n(F) \Rightarrow C-D\in ST^n(F)$$

لأن طرح صفرين يعطي صفراً

ثانياً:

$$\forall A\in T^n(F), B\in ST^n(F): A=(a_{ij}), b=b_{ij}$$

$$\Rightarrow A.B=C=(C_{ij}): C_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

في المجموع السابق لتناقص قيم c_{ij} عندما j تزداد
ولذلك غير حاليتين: $\star$ k إذا في هذه الحالة $a_{ik}=0$
$\star$ $i \geq k$ وبالتالي j تزداد k إذاً
$b_{kj}=0$ وبالتالي $j \geq k$
إذاً $c_{ij}=0$ عندما j تزداد دائماً $A.B = C \in ST^n(F)$
إذاً $ST^n(F)$ إيديال أيضاً.
(وبنفس الطريقة نبرهن أنّه إيديال أيمن)

$\star$ نعرف التطبيق:

$$\phi : T^n(F) \longrightarrow D^n(F)$$

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

إذاً ϕ تطبيق معرف جيداً وواضحاً و ϕ هو مورفيزم زمر.

$$\phi(A+B) = \phi(A) + \phi(B)$$

برهان:

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{2n} \\ \vdots & & \\ 0 & & b_{nn} \end{bmatrix}\right) =$$

$$\phi\left(\begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & \cdots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ 0 & (a_{22}+b_{22}) & (a_{2n}+b_{2n}) \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & (a_{nn}+b_{nn}) \end{bmatrix}\right) =$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & \cdots & \\ 0 & (a_{22}+b_{22}) & 0 \\ 0 & \cdots & (a_{nn}+b_{nn}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & 0 \\ & & \\ 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \phi(A) + \phi(B)$$

ليكن $A, B \in T^n(F)$ و $AB = C = (c_{ij})$

إذا

$$\boxed{c_{ii} = a_{ii} \cdot b_{ii}} \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

$$1 \leq i \leq n$$

وذلك بسبب بنية المصفوفتين A, B من $T^n(F)$

إذاً

$$\phi(A \cdot B) = \phi(A) \cdot \phi(B)$$

ومنه ϕ هومورفيزم زمر

نواته:

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

مجموعة المصفوفات المثلثية العليا التي عناصر قطرها الرئيسي تساوي أصفاراً

إذا نواته هي $ST^n(F)$ ومنه حسب نظرية الأيزومورفيزم الأولى:

$$T^n(F)/ST^n(F) \cong Im(\phi)$$

ولكن ϕ غامر وضوحاً

$$\Rightarrow T^n(F)/ST^n(F) \cong D^n(F)$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة