كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z



يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

* لتكن $S$ مجموعة غير خالية إن علاقة الترتيب $f$ المعرفة على $S$ هي علاقة: انعكاسية - تخالفية - متعدية.

* كل مجموعة مزودة بعلاقة ترتيب هي مجموعة مرتبة والترتيب إما نوعان: ترتيب كلي - ترتيب جزئي.

الترتيب الكلي: إذا كان كل عنصرين من $S$ متقارنين وفق $f$

الترتيب الجزئي: إذا لم يكن بالضرورة كل عنصرين متقارنين أي أنه ليست كل عناصر $S$ متقارنة وفق $f$.

* نقول عن مجموعة مرتبة جزئياً أنها مجموعة استقرائية إذا كانت كل سلسلة من $S$ (مجموعة جزئية من $S$ مرتبة كلياً) يحاد من أعلى في $S$.

* لتكن $S$ مجموعة مرتبة جزئياً نقول عن $m \in S$ أنه عنصر أعظمي إذا كان تحقق أنه:

$$\forall x \in S;\ m \leq x \Rightarrow m = x$$

* مبرهنة زورن: كل مجموعة استقرائية غير خالية تملك عنصراً أعظمياً.

مبرهنة: R حلقة تبديلية بواحدة عندئذٍ M إسبال أعظمي إذا وفقط إذا كان R/M حقل.

تعريف: ليكن p إسبال تبديلي خاطئ في الحلقة R عندئذٍ p يُدعى إذا وفقط إذا كان لأجل كل عنصرين a,b من R بحيث $a.b \in p$ عندئذٍ فإنه إما $a \in p$ أو $b \in p$

مبرهنة: R حلقة تبديلية بواحدة عندئذٍ فإن الإسبال p في R هو إسبال أولي إذا وفقط إذا كانت R/p حلقة صحيحة.

الإثبات:

p إسبال أولي عندئذٍ p هو إسبال خاطئ $p \neq R$ إذاً $R/p \neq \{0\}$ وبالتالي R/p أصبحت حلقة بواحدة $1+p$ بفرض $p = \bar{0} = \bar{a}.\bar{b}$ هذا يعني أنه $\bar{a}.\bar{b} = \bar{0} = p$ وبالتالي $a.b \in p$ إذاً إما $a \in p$ وبالتالي $\bar{a} = \bar{0}$ أو $b \in p$ وبالتالي $\bar{b} = \bar{0}$ وبالتالي R/p حلقة صحيحة.

بصورة معاكسة:

بفرض أن R/p حلقة صحيحة و $p = \bar{0} = \bar{a}.\bar{b}$ بما أن R/p تحوي قواسم للصفر إذا وإذا $\bar{a} = \bar{0}$ وهذا $a \in p$ أو $\bar{b} = \bar{0}$ وهذا $b \in p$ إذاً p إسبال أولي.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

**برهنة:** $R$ حلقة تبديلية بواحدة و $I$ إيديال فيها إذا كان $I$ أعظمياً فإنّ $I$ أولي.

**الإثبات:**

بفرض أن $I$ ليس إيديالاً أولياً و $a,b \in R$ بحيث أنه: $a.b \in I$ و $a \notin I$ و $b \notin I$، نعرف:

$$J = \{x \in R \; ; \; a.x \in I\}$$

إذاً $I \subset J$ لأنّ:

$$\forall i \in I \; ; \; a.i \in I \Rightarrow i \in J$$

إنّ $J \neq R$ لأنّ $1 \notin J$ وذلك لأنّه فيما لو انتمى $1 \in J$ فهذا يعني $a.1 \in I \Leftarrow a \in I$ وهذا يناقض الفرض $a \notin I$ و $J \neq I$ لأنّ $b \in J$ بسبب $a.b \in I$ ولكن $b \notin I$ وبالتالي $I$ ليس أعظمياً.

كان بالإمكان التوصل إلى البرهان بطريقة أخرى:

$I$ أعظمي عندئذٍ $R/I$ حقل وكل حقل هو حلقة صحيحة إذاً $I$ أولي.

**نتيجة:** $f : R \to S$ هومومورفيزم حلقات غامر و $R, S$ حلقتان تبديليتان بواحدة فإنّ:

1. $S$ حقل عندئذٍ $\ker(f)$ إيديال أعظمي.
2. $S$ حلقة صحيحة عندئذٍ $\ker(f)$ إيديال أولي.

بنظرية الأيزومورفيزم الأولى: $R/\ker(f) \simeq Im(f)$

حيث $Im(f) = S$ لأنّ $f$ غامر $\Leftarrow R/\ker(f) \simeq S$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

## التمييز (Localization):

ليكن F حقل و R حلقة جزئية من الحقل F عندئذٍ R حلقة مميزة إذا أمكن حقل جزئي من F يحوي R يعرف بالشكل:

$$\phi(R)=\{a/b \in F ;\ a,b \in R \ \&\ b\neq 0\}$$

بفرض أن R حلقة مميزة، هل يمكن إيجاد حقل F يحوي حلقة جزئية ايزومورفية إلى R ؟

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z