كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

نتائج هامة:

* إذا كان $f: R \to S$ هومومورفيزم الحلقات عندئذٍ $\ker(f)$ هي إيديال في R
* إذا كانت R حلقة متحدة $[R = R^*]$ عندئذٍ الإيديالات الوحيدة في R هي $\{0\}$ و R نفسها.
* إذا كانت R حلقة متحدة و $f: R \to S$ هومومورفيزم حلقات عندئذٍ f متباين أو $f \equiv 0$
* R حلقة و $I \subset R$ إيديال فيها نعرف عامل الحلقة بالشكل:

$$R/I = \{a+I : a \in R\} = \{[a] ; a \in R\}$$

نسمي a ممثل الصف

نعرف على R/I عمليتين:

(جمع) $\forall a+I, b+I \in R/I : (a+I)+(b+I) = (a+b)+I$

(ضرب) $\forall a+I, b+I \in R/I : (a+I)(b+I) = ab+I$

إن R/I مع عمليتي الجمع والضرب المعرفتين أعلاه لهما بنية حلقة.

صفر الجمع هو I

إذا كانت R حلقة بواحدة فإن R/I حلقة بواحدة حيادي الضرب فيها هو $1+I$

* نعرف تشاكل زمرياً $\pi : R \to R/I$

$x \mapsto x + I$

π : يدعى الإسقاط الطبيعي (Natural projection)

وهو تشاكل حلقات نواته $\boxed{\ker \pi = I}$

نقول أن $a = b \pmod I \iff a - b \in I$

نظريات الأيزومورفيزم الثلاث:

1) إذا كان $f : R \to S$ تشاكل حلقات:

$R/\ker(f) \cong Im(f)$

الإثبات:

نعرف $\bar{f}$ بالشكل: $\bar{f} : R/K \to Im(f)$

$K = \ker f$

$\bar{f}(x+K) = f(x)$

تطبيقاً معرفاً جيداً.

الفرضية: $x + K = x' + K'$

$\bar{f}(x+K) = f(x)$

$\bar{f}(x'+K) = f(x')$

نفرض $f(x) \neq f(x')$

عندئذ $f(x - x') \neq 0$ ، $x - x' \notin K$

ولكن بما أنه $x + K = x' + K$ من الفرض هذا يعني أن $x - x' \in K$ ، وهذا يناقض النتيجة السابقة

والمناقض سببه فرضنا الخاطئ أن $f(x) \neq f(x')$

إذاً $f(x) = f(x')$

والتطبيق $\bar{f}$ معرف جيداً وهو تشاكل حلقات تشاكلية $\bar{f}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نتيجة مباشرة من هومومورفيزم $\bar{f}$:

* $\bar{f}$ غامر

$\forall b \in Im(f) \Rightarrow \exists a \in R ; f(a) = b$

إذاً $\bar{f}(a+b) = f(a) = b$

وبالتالي f غامر.

* $\bar{f}$ متباينة:

$\bar{f}(a+k) = \bar{f}(b+k)$

$f(a) = f(b)$

$f(a) - f(b) = 0$

$f(a-b) = 0 \Rightarrow a-b \in K$

$a-b=c ; c \in K \Rightarrow$

$a = k+c \Rightarrow$

$a+k = b+c+k = b+k$

2 لتكن R حلقة تبديلية و $I \subset R$ إيديال في R و $S \subset R$ حلقة جزئية عندئذٍ $S+I$ حلقة جزئية من R و I إيديال في $S+I$، $S \cap I$ هو إيديال في S و I يوجد أيزومورفيزم حلقات بين $S+I/I$، $S/S \cap I$

$S+I/I \cong S/S \cap I$

الإثبات: بفرض أن $s, s' \in S$ و $a, a' \in I$

يكفي إثبات أن $S+I$ زمرة جزئية من R

* إثبات أن $(S+I, +)$ زمرة جزئية:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall\ S+a,\ S'+a' \in S+I \Rightarrow (S+a)+(S'+a') = (S+S')+(a+a') \in S+I$

النظير الجمعي لـ $S+a$ هو $-S-a$

شرط الجمعية والجزئية كون $(R,+)$ زمرة.

الطباق في $(S+I)$ مغلق

$(S+I)(S'+a') = SS' + Sa' + IS' + Ia' \in S+I$

وبالتالي $S+I$ زمرة جزئية من R.

* من كون I إيديالاً في R:

$\forall r \in I,\ \forall (S+a) \in S+I \Rightarrow (S+a)r = Sr + ar \in I$

* من كون $S \cap I$ إيديال في S:

$\forall s \in S',\ t \in S \cap I \Rightarrow st \in S\ \&\ st \in I$

$\Rightarrow st \in S \cap I$

وبالتالي $S \cap I$ إيديال في S

* ليكن π هو:

$\pi : R \to R/I$

$r \to r+I$

* نعرف π° بقصور π على S $\quad \pi^\circ : S \to R/I$

نواة π° هي $S \cap I$

حسب نظرية الأزدواج نظرية التماثل الأولى: $S/S\cap I \cong Im(\pi^\circ)$

ولكن $Im(\pi^\circ)$ هي مجموعة صفوف التكافؤ لـ S بـ I وبالتالي

$S+I/I \cong Im(\pi^\circ)$

$\Rightarrow S+I/I \cong S/S\cap I$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3) لتكن R حلقة و I و J إيديالان في R بحيث أن $I \subseteq J$ عندئذٍ J/I إيديال في R/I و

$$R/J \cong (R/I)/(J/I)$$

حسب نظرية الأيزومورفيزم الأولى:

$$(R/I)/(J/I) \cong R/J$$

الإثبات:

$\forall j+I \in J/I$

$\forall r+I \in R/I$

عندئذٍ:

$(j+I)(r+I) = jr+I \in J/I$ (لأن $jr \in J$)

إذاً J/I إيديال في R/I

* نعرف التطبيق:

$$f: R/I \to R/J$$

$$f(a+I) = a+J$$

* f معرف جيداً

نفرض $a+I = b+I$ عندئذٍ:

$$f(a+I) = a+J$$

$$f(b+I) = b+J$$

بما أن $a+I = b+I$ هذا يعني $a-b \in I$ وبالتالي

$a-b=c$; $c \in I$

$$a = b+c$$

إذاً $a+J = (b+c)+J = b+(c+J) = b+J$

* f هومومورفيزم لأن:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$f[(a+I)+(b+I)] = f[(a+b)+I]$$
$$= (a+b)+J \quad *$$
$$= (a+J)+(b+J)$$
$$= f(a+I)+f(b+I)$$

$$\ker f = \{a+I \; ; \; a+J = J\} \Leftrightarrow a \in J \Leftrightarrow \ker f : J/I$$

* f غامر:

$$\forall\, a+J \in R/J$$
$$\exists\, a+I \in R/I : f(a+I) = a+J$$

تعريف: * المثالية الجزئية من R المولدة بالمجموعة $\phi \neq X \subseteq R$ هي تقاطع كل المثاليات الجزئية من R التي تحوي X

* المثال المولد بالمجموعة X هو تقاطع كل المثاليات في R التي تحوي X ويرمز له بـ $\langle X \rangle$

* يبرهن أن المثالية الجزئية المولدة بالمجموعة $\phi \neq X \subseteq R$ هي مجموع وضرب كل الجداءات الممكنة والمنتهية لعناصر X.

* إذا كانت R حلقة بواحدة و $\phi \neq X \subseteq R$

$$\langle X \rangle = RXR = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i s_i \; ; \; r_i, s_i \in R, \; x_i \in I, \; n \geq 1 \right\}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وإذا كانت R تبديلية:

$$\langle X\rangle = RX = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \;;\; \begin{array}{l} r_i \in R \\ x_i \in X \\ n \geq 1 \end{array} \right\}$$

تعريف: إذا كان $X=\{a\}$ نقول بأنّ الإيدال $\langle X\rangle$ المولد بـ X في الحلقة R:

$$\langle X\rangle = Ra = \{r.a \;;\; r \in R\}$$

هو إيدال رئيسي.

تعريف: حلقة الإيدالات الرئيسية (PID): هي حلقة صحيحة كل إيدال فيها هو إيدال رئيسي.

× $M \subset R$ حيث R حلقة و M إيدال نقول أنّ M إيدال خاص إذا كان $M \neq 0$, $M \neq R$ (properIdeal)

M إيدال أعظمي إذا تحقق $M \subset I \subset R$ فإنّ $I = M$ أو $I = R$

مبرهنة:

لتكن R حلقة بواحدة و $I \neq R$ إيدال في R عندئذٍ يوجد إيدال أعظمي في R يحوي I

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الإثبات: S هي مجموعة كل الإيديالات J في R التي تحوي I

إنّ $S \neq \phi$ لأن $I \in S$

نقوم بترتيب عناصر S جزئياً باستخدام علاقة الاحتواء

لتكن $C = \{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$ سلسلة في S

عناصر C بالشكل:

$I \subseteq J_\alpha \subseteq J_\beta \subseteq J_\gamma \subseteq J_\xi \subseteq \dots$

حيث A مجموعة الفهارس.

نعرف: $J = \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha$

إنّ J إيديال في R.

إذا كان $a, b \in J$ و $r \in R$

ينتج أنّ $a, b \in J_\alpha$ لأجل ما α

لأنّ سلسلة C سلسلة محاددة وبالتالي: $a - b \in J_\alpha$

$ab \in J_\alpha$ ، $ar \in J_\alpha$ و $ra \in J_\alpha$

والنتيجة: $a-b, ab, ar, ra \in J$

أكثر من ذلك $J \neq R$ لأنّ $1 \notin J$

ومنه J حدّ أعلى للسلسلة C إذا S علىً عكس

أعظمياً M هذا العنصر الأعظمي هو إيديال أعظمي.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z