كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : الرابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

السؤال الأول:

أثبت أن $Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ دالة التوزيع الطبيعي المعياري وهي دالة كثافة احتمالية

الحل: أولاً: $Q(x)\geq 0$ لكل $x\in IR$

ثانياً:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

تربيع الطرفين:

$$I^2=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}dx\,dy$$

بالانتقال إلى الإحداثيات القطبية:

(r,θ) فإنّ:

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r^2=x^2+y^2$,

$r>0$, $0<\theta<2\pi$

$dx\,dy=r\,dr\,d\theta$

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \, r \, dr \, d\theta$$

بالمقابلة:

$$dx\,dy = \det(J)\, dr\, d\theta$$

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$

$$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

باستخدام محدد جاكوبيان:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\det(J) = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

بكتابة التكامل:

$$I^2 = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-r^2}{2}} d\theta\right) r\,dr = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi} e^{\frac{-r^2}{2}} \int_0^{2\pi} d\theta\right) r\,dr$$

$$= \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi} e^{\frac{-r^2}{2}} [\theta]_0^{2\pi}\right) r\,dr = \int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\, r\, dr = \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty}$$

$$I^2 = -e^{-\infty} - (-e^0) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow I = 1$$

وبما فإن الشرط الثاني تحقق وبالتالي الدالة k دالة كثافة احتمالية.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

السؤال الثاني:

ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً مطلقاً يتبع توزيعاً أسياً بوسيط $\lambda = 4$

أي $X \sim (4)$ أوجد احتمالات الأحداث التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 4e^{-4x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

① $p(X \geq 5)$

$$p(X \geq 5) = \int_5^{\infty} 4e^{-4x}\,dx = e^{-4(5)} = e^{-20}$$

② $p(X > -5)$

$$p(X > -5) + p(X \geq 0) = \int_{-5}^{0} 0\,dx + \int_0^{\infty} 4e^{-4x}\,dx = 0 + 1 = 1$$

③ $p(X^2 \geq 9)$

$X^2 \geq 9 \Leftrightarrow (X \geq 3) \wedge (X \leq -3)$

$$p(X^2 \geq 9) = \int_{-\infty}^{-3} 0\,dx + \int_3^{\infty} 4e^{-4x}\,dx = 0 + e^{-4(3)} = e^{-12}$$

④ $p(X^4 - 17) \geq 9$

$[X^4 - 17 \geq 9] \Leftrightarrow [X^4 \geq 26] \Leftrightarrow$

$[X^2 \leq -(26)^{\frac{1}{2}}] \wedge [X^2 \geq (26)^{\frac{1}{2}}] \Leftrightarrow$

مرفوض

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$[X \le -(26)^{\frac{1}{4}}] \wedge [X \ge (26)^{\frac{1}{4}}]$

بالتالي:

$$p[x^4 - 17 \ge 9] = \int_{-\infty}^{-(26)^{\frac{1}{4}}} 0\,dx + \int_{(26)^{\frac{1}{4}}}^{\infty} 4e^{-4x}\,dx$$

$$= e^{-4(26)^{\frac{1}{4}}}$$

السؤال الثالث:

$X \sim N(0,1)$ نرمز ليكون المتغير العشوائي المستمر يتبع توزيعاً طبيعياً معيارياً ودالة كثافة الاحتمالية تعطى بالعلاقة

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ نرمز ليكون المتغير العشوائي المستمر يتبع توزيعاً طبيعياً ودالة كثافة الاحتمالية في هذه الحالة تعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)}{2\sigma^2}}$$

بفرض أن X يتبع توزيعاً طبيعياً بمعيارياً $X \sim N(0,1)$ و Y يتبع توزيعاً طبيعياً $\mu = 1$ و $\sigma = 1$

$Y \sim N(1,1)$

أثبت أن $p(X<3) > p(Y<3)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$P(Y<3)=\int_{-\infty}^{3} e^{\frac{-(y-1)^2}{2}}\,dy$$

باستخدام تغيير المتحول: $u=y-1$ حيث أن

$$dy=du$$

$y\to\infty \quad u\to\infty$

$y\to 3 \quad u\to 2$

$$P(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

وبالتالي نجد:

$$U\sim(0,1)\iff X\sim N(1,1)$$

$$U<2\iff U+1<3\iff Y<3$$

$$P(Y<3)=P(U<2)=\int_{-\infty}^{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

بما أن قيمة التكامل لا تتأثر بتغيير اسم المتحول عندئذٍ

$$P(Y<3)=P(U<2)=\int_{-\infty}^{2}\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=P(X<2)$$

وبالتالي:

$$P(Y<3)=P(X<2)$$

إذا

$$P(X<2)<P(X<3)$$

$$P(Y<3)<P(X<3)$$

ذلك لأن:

$$P(X<3)=P(X<2)+P(2<X\leq 3)$$

ولكن $P(2<X\leq 3)\geq 0$ في التوزيع الطبيعي المعياري

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة