كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مبرهنة:

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots$ مجموعة من الأحداث التي تحقق

عندئذٍ: $\{A_n\} \searrow A$ أو $\{A_n\} \nearrow A$

$$\lim_{n\to\infty} p(A_n) = p(A)$$

الإثبات:

$$A = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c) \cup (A_3 \cap A_2^c) \ldots$$

$$p(A) = \lim_{n\to\infty} p\{A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n-1}^c)\}$$

$$p(A) = \lim_{n\to\infty} p(A_1) + p(A_2 \cap A_1^c) + \ldots$$

ولكن:

$$p(A) + p(A_2 \cap A_1^c) + \ldots + p(A_n \cap A_{n-1}^c) = p(A_n)$$

$$\Rightarrow p(A) = \lim_{n\to\infty} p(A_n)$$

إذا كانت لدينا $\{A_n\} \searrow A$ نأخذ $B_n = A_n^c$

$$B = A^c$$

$$\{B_n\} \nearrow \{B\}$$

إذاً لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} p(B_n) = p(B) \quad \star$$

$$P(B) = 1 - P(A)$$

$$P(B_n) = 1 - P(A_n)$$

نكتب في * ضرب الطرفين بـ (-1) فنجد (1):

يصبح لدينا:

$$1 - \lim_{n\to\infty}\{P(B_n)\} = 1 - P(B)$$

$$\lim_{n\to\infty}(1 - P(B_n)) = P(A)$$

التوزيع الأسي السالب:

نعلم أن دالة الكثافة الاحتمالية في التوزيع الأسي تعطى بالعلاقة

$$f(x) = e^{-x}$$

أي التوزيع الأسي السالب فهو توزيع احتمالي مستمر دالة كثافة الاحتمالية تعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad ; \quad \lambda > 0$$

$$x \geq 0$$

لنبرهن أن f دالة كثافة احتمالية:

* وضحنا أن $f(x) \geq 0$ عندما $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx \quad *$$

$$= 0 + \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_{0}^{+\infty}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \left[-e^{\lambda x}\right]_0^{\infty} = -e^{-\lambda\infty} + e^{-\lambda(0)} = 1$$

* في التوزيع الأسي السالب:

$$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b$$

$$= e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}$$

$$p(X \geq a) = \int_a^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^{\infty} = e^{-\lambda a}$$

مثال: إذا علمت أن العمر التقديري لمصباح كهربائي بالأيام يتبع توزيع أسي سالب بمعلم $\lambda = \frac{1}{100}$

احسب احتمال أن يدوم المصباح الكهربائي لمدة تتجاوز العام:

$$p(X \geq 365) = e^{-\frac{1}{100}(365)} = e^{-\frac{365}{100}}$$

التوزيع الطبيعي المياري:

نعرف دالة ϕ بالشكل

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad ; x \in \mathbb{R}$$

إن الدالة ϕ هي دالة موجبة وضوحاً.

يرهن أن $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\, dx = 1$ (في المحاضرة القادمة)

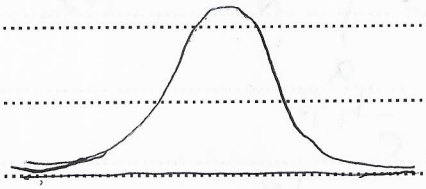
أصبح ϕ دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي مستمر X نقول

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إذا X في هذه الحالة يتبع توزيعاً طبيعياً معيارياً:

$$X \sim N(0,1)$$

شكلة البياني:



التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ ،

ليكن $\mu \in R$ ، $\sigma > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad **$$

نلاحظ أن عندما $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ نحصل على التوزيع الطبيعي المعياري.

بإجراء تغيير للمتحول:

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow dx = \sigma\, dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{-1} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)\, dy = 1$$

وبالتالي الدالة المعطاة بالعلاقة ** هي دالة كثافة احتمالية.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z