كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

طاقة الاهتزازات المستعرضة:

لتعيين صيغة طاقة الاهتزازات المستعرضة بالمعادلة $E = K + U$ (طاقة كامنة، طاقة حركية)

طاقة حركة العنصر dx من الخيط.

يتحرك بسرعة $u_t = v$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho \, dx \, (u_t)^2$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho (u_t(x,t))^2 \, dx$$

الطاقة الحركية

الطاقة الكامنة للاهتزازات المستعرضة

للخيط في اللحظة t وهي عكس العمل الواجب بذله لكي ينقل الخيط من وضع التوازن إلى الوضع $u(x,t)$

والعنصر dx تحت فعل قوى الشد

$$T u_x \Big|_{x+dx} - T u_x \Big|_x = T u_{xx} \, dx$$

dx يقطع خلال زمن dt مسافة $u_t(x,t)\,dt$

فالعمل المبذول للعنصر dx: $T u_{xx} \, dx \, u_t(x,t)$

العمل المبذول لكامل الخيط:

$$\left(\int_0^L T u_{xx} u_t \, dx \right) dt$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$= \left(T u_x u_t \Big|_0^L - T \int_0^L u_x u_{xt} \, dx \right) dt$$

$\int u dv = uv - \int v du$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$$= \left(T u_x u_t \Big|_0^L - T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (u_x)^2 dx \right) dt$$

بإجراء تكامل بالنسبة لـ t :

$$= -\frac{1}{2} \int_0^L T (u_x)^2 dx \Big|_0^t + \int_0^t T u_x u_t \Big|_0^L dt$$

في حال الطرفين ثابتين تكون الانتقالات معدومة وبالتالي السرعة معدومة.

$$u_t(0,t) = u_t(L,t) = 0$$

وإذا كانت النهايات حرة :

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \int_0^L T u_x^2 (x,t) dx$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\rho u_t^2 (x,t) + T u_x^2 (x,t) \right) dx$$

نقسم على ρ :

$$\text{(*)} \quad E = \frac{1}{2} \int_0^L \left(u_t^2 + c^2 u_x^2 \right) dx$$

تطبيق: برهن أنّ :

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \left(u_t(L,t) u_x(L,t) - u_t(0,t) u_x(0,t) \right) \quad ; c^2 = \frac{T}{\rho}$$

الحل : نشتق (*)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(2 u_t u_{tt} + 2 c^2 u_x u_{xt} \right) dx$$

(وبتكامل بالتجزئة)

$$= \int_0^L u_t u_{tt} dx + c^2 \left[u_x u_t \Big|_0^L - \int_0^L u_t u_{xx} dx \right]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \int_0^L \left(u_t u_{tt} - c^2 u_t u_{xx} \right) dx + c^2 \left(u_x(L,t)\, u_t(L,t) - u_x(0,t)\, u_t(0,t) \right)$$

$$= \int_0^L \left[u_t \left(u_{tt} - c^2 u_{xx} \right) \right] dx + c^2 \left(u_x(L,t)\, u_t(L,t) - u_x(0,t)\, u_t(0,t) \right)$$

$= 0$ (معادلة الموجة)

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = c^2 \left[u_t(L,t)\, u_x(L,t) - u_t(0,t)\, u_x(0,t) \right]$$

معادلة الموجة مع حد التخامد :

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \gamma u_t = 0 \qquad ; \gamma > 0$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \int_0^L u_t \left(u_{tt} - c^2 u_{xx} \right) dx$$

$$= -\gamma \int_0^L (u_t)^2 dx < 0$$

ملاحظة (معادلة الموجة مع حد التخامد) : وهذه الحالة تفسر الطاقة يصبح صفر فقط عندما $u_t(L,t) = 0$ أي عندما نطبق الخيط على وضع التوازن

ملاحظات حول الشروط الحدية والابتدائية لأن :

① إذا كانت النهايات ثابتة بالتالي :

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

$$u_t(0,t) = u_t(L,t) = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = \text{Constant}$$

② إذا كانت النهايات تتغير مع الزمن :

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$u(0,t) = g_1(t)$$
$$u(L,t) = g_2(t)$$

بالتالي قوى البث تكون معدومة

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$$

③ إذا كانت إحدى النهايات بثبة والأخرى ~~بثبة~~ والأخرى حرة:

$$u(0,t) = 0$$
$$u_x(L,t) = 0$$

④ إذا كان ما يهمنا حدوث الظاهرة عند فترة زمنية صغيرة جدا لا يكون تأثير الحدود جوهريا فإنه يمكن بدلا من المسألة الكاملة دراسة المسألة بشروط ابتدائية فقط (منطقة لانهائية):

معادلة الموجة

$$+\infty > x > -\infty \qquad u(x,0) = \varphi(x)$$
$$u_t(x,0) = \psi(x)$$

⑤ إذا كنا ندرس الظاهرة قرب أحد الحدود بحيث لا يكون لتأثير النظام الحدي للحد الآخر قيمة جوهرية خلال الفترة الزمنية التي تهمنا فإننا نصل إلى صياغة المسألة على نصف مستقيم لانهائي. $0 < x < \infty$

معادلة الموجة

تكون شروط المسألة:

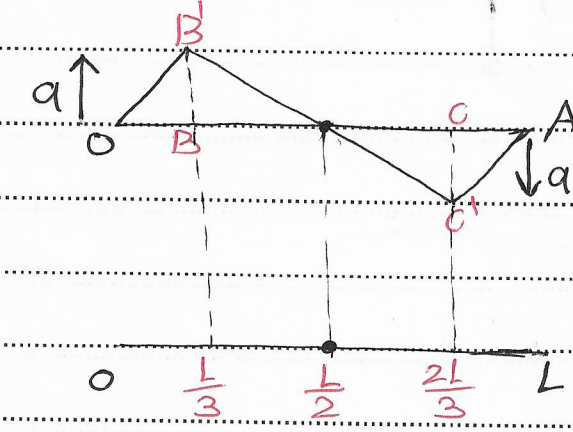
$$u(0,t) = \mu(t) \qquad t \geq 0$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad 0 < x < \infty$$
$$u_t(x,0) = \psi(x)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

⑥ إذا كانت الظاهرة تدرس في لحظات زمنية بعيدة بشكل كافٍ عن اللحظة الابتدائية $t=0$ فإن الشروط في المسألة تتصرف على الشروط الحدية لأن الشروط الابتدائية تضعف مع مرور الزمن، معادلة الموجة

$$u(0,t)=\mu_1(t)$$
$$u(L,t)=\mu_2(t)$$
$$0 \le x \le L$$

مسألة: خيط مشدود وثبت بنهايتين A,O نزيح الخيط بين نقطتين الأسفل والأعلى باختيار متساويين A ومن نقطتين تبعدان بمسافات متساوية عن الطرفين وعن بعضهما، اكتب النموذج الرياضي ① الذي يصف المسألة ثم برهن أن ② الإزاحة تبقى صغيرة عند المنتصف.



الحل:

① $u_{tt}=C^2 u_{xx}$

(شروط حدية) $u(0,t)=u(L,t)=0$

(لأن النهايات مثبتة)

نبين الشروط الابتدائية لتحديد الوضع الابتدائي للخيط:

OB' ، $B'C'$ ، $C'A$

$$u=\frac{3a}{L}x \quad , \quad u=\frac{3a}{L}(-2x+L) \quad , \quad u=\frac{3a}{L}(x-L)$$

⇐ النموذج الرياضي:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

$$u(x,0) = \frac{3a}{L} \begin{cases} x & ; \quad 0 \le x \le \frac{L}{3} \\ L - 2x & ; \quad \frac{L}{3} \le x \le \frac{2L}{3} \\ x - L & ; \quad \frac{2L}{3} \le x \le L \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = 0$$

② برهان أن $u\left(\frac{L}{2}, t\right) = 0$ بسبب حلية $u(x,t)$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(v(x+ct) + v(x-ct)\right)$$

$$\frac{L}{3} \le x \le \frac{2L}{3} \quad = \frac{1}{2}\,\frac{3a}{L}\left(-2x - 2ct + L - 2x + 2ct + L\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{3a}{L}\left(-4x + 2L\right)\Big|_{\frac{L}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow u\left(\frac{L}{2}, t\right) = 0$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z