كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية:

رأينا أنّ هذه المعادلات تصنف إلى زائدية - قطعية - ناقصية

سأعطي مثال على كل منها: معادلة الموجة - معادلة لابلاس - معادلة الحرارة (على الترتيب).

معادلة الموجة:

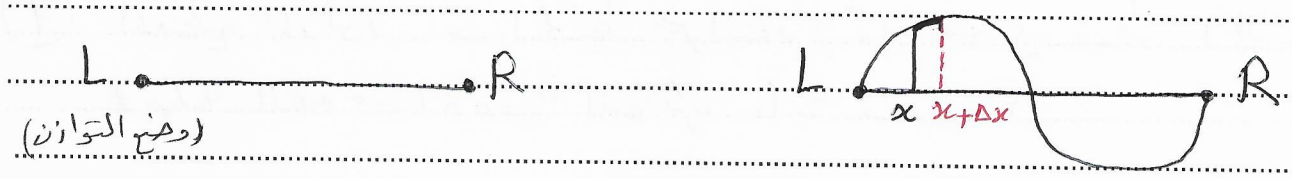
الشكل العام لهذه المعادلة في البعد الواحد $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

لهذه المعادلة العديد من التطبيقات الفيزيائية مثل الأمواج الصوتية في الهواء، الأمواج المغناطيسية في الغلاف الجوي وغيرها.

من أبسط المسائل المؤدية إلى معادلة من النمط الزائدي معادلة الذبذبات المتعرجة الصغيرة على خيط مرن مشدود قابل للاهتزاز بقساوة.

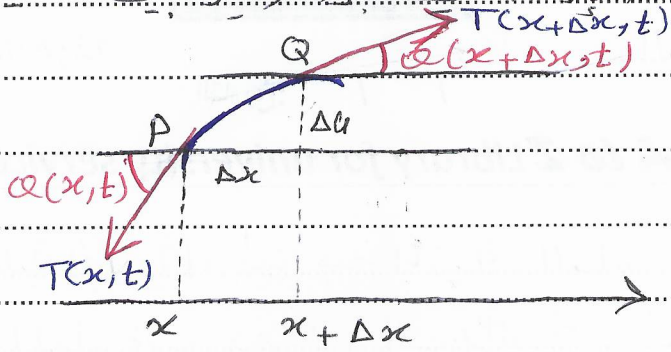
* استنتاج المعادلة:

ليكن لدينا خيط مرن مشدود موضوع بشكل أفقي ومثبت في نهايتيه اليمنى R واليسرى L (هذا الخيط في نهايته اليسارية) نأخذ موجة تمر هذا الخيط هدفنا تحديد الانزياح العودي للخيط $u(x,t)$ عن موضع التوازن في الموضع x واللحظة t



مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

نعبر عن مقدار الإزاحة في جزء صغير بين نقطتين من الخيط بالشكل:



$\theta(x,t)$ الزاوية الناتجة بين اتجاه الخيط والخط الأفقي في الموضع x واللحظة t

$T(x,t)$ توتر الخيط في الموضع x واللحظة t

ρ كثافة الخيط (الكتلة في واحدة الطول).

* للحصول على العبارة التي تعبر عن الآلة نحتاج لبعض الفرضيات:

(1) كثافة الخيط ρ ثابتة بالتالي كتلة الخيط بين P و Q تكون جداء الكثافة بطول الخيط بين هاتين النقطتين.

$$\Delta S = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta x)^2}$$

(2) مقدار الإزاحة بين P و Q صغير بقدر كافي $\Delta S \approx \Delta x$ بالتالي كتلة الخيط بين P و Q هي $\rho \Delta x$

(3) القوى المطبقة على هذا الجزء من الخيط هي قوة الشد (أو التوتر).

$T(x+\Delta x, t)$ على Q، $T(x,t)$ على P

قوى الجاذبية مهملة.

(4) المطلوب المذكور من الخيط يتحرك بشكل عمودي فقط لذلك محصلة القوى الأفقية المؤثرة عليه معدومة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$-T(x,t)\cos\alpha(x,t)+T(x+\Delta x,t)\cos\alpha(x+\Delta x,t)=0$$

$$T=T(x,t)\cos\alpha(x,t)=T(x+\Delta x,t)\cos\alpha(x+\Delta x,t)\quad(*)$$

$$T(x+\Delta x,t)\sin\alpha(x+\Delta x,t)-T(x,t)\sin\alpha(x,t)=\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

الكتلة — التسارع

نقسم المعادلة (*) على T:

$$\frac{T(x+\Delta x,t)\sin\alpha(x+\Delta x,t)}{T(x+\Delta x,t)\cos\alpha(x+\Delta x,t)}-\frac{T(x,t)\sin\alpha(x,t)}{T(x,t)\cos\alpha(x,t)}=\frac{\rho}{T}\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\tan(x+\Delta x,t)-\tan(x,t)=\frac{\rho}{T}\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

~~نقسم المعادلة على Δx~~

$$u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)=\frac{\rho}{T}\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

نقسم المعادلة على Δx

$$\frac{u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)}{\Delta x}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

نجعل $\Delta x\to 0$

$$\Rightarrow u_{xx}=\frac{\rho}{T}u_{tt}$$

وهي المعادلة الموجية الخطية $\boxed{u_{tt}=\frac{T}{\rho}u_{xx}}$

حيث $c^2=\frac{T}{\rho}$ و c تمثل سرعة الموجة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التفسير الذي تعطيه معادلة الموجة:

$u_{tt} < 0$ ، $u_{xx} < 0$ (الذراع الحوي)

تقعر نحو الأسفل

تقعر نحو الأعلى

$u_{tt} > 0$ ، $u_{xx} > 0$

الذراع في كل نقطة بين نتائج الخيط ناجم عن قوة التوتر.

حل معادلة الموجة $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$(D_t^2 - c^2 D_x^2) = 0$$

نحلل على شكل جداء أقواس:

$$(D_t - cD_x)(D_t + cD_x)u = 0$$

$$u = f(x+ct) + g(x-ct)$$

حيث f, g توابع اختيارية

$f(x+ct)$ تمثل موجة تتحرك نحو اليسار بسرعة c

$f(x-ct)$ تمثل موجة تتحرك نحو اليمين بسرعة c.

مسألة كوشي:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

الشروط الابتدائية:

$u(x,0) = \varphi(x)$

$u_t(x,0) = \psi(x)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

$$u_t(x,t) = c f'(x+ct) - c g'(x-ct)$$

نعوض بالشروط الابتدائية:

$$v(x) = u(x,0) = f(x) + g(x) \quad (1)$$

$$w(x) = u_t(x,0) = c f'(x) - c g'(x)$$

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c}\int_0^x w(s)\,ds \quad (2)$$

بالجمع (1 و 2):

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(v(x) + \frac{1}{c}\int_0^x w(s)\,ds\right)$$

$$g(x) = v(x) - f(x)$$

$$= v(x) - \frac{1}{2}\left(v(x) + \frac{1}{c}\int_0^x w(s)\,ds\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\left(v(x) - \frac{1}{c}\int_0^x w(s)\,ds\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left(v(x+ct) + \frac{1}{c}\int_0^{x+ct} w(s)\,ds\right) + \frac{1}{2}\left(v(x-ct) - \frac{1}{c}\int_0^{x-ct} w(s)\,ds\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(v(x+ct) + v(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} w(s)\,ds\right)$$

يسمى هذا الحل بطريقة لابلاس.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة