كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : الثالثة /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

في فضاء المتتاليات المحدودة وغير المحدودة نعرف المسافة:

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}$$

ملاحظة: $a\le b$ نضيف ab إلى طرفي التراجح

$$a+ab\le b+ab$$

$$\Rightarrow a(1+b)\le b(1+a)$$

نقسم الطرفين على $(1+b)(1+a)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a}{1+a}\le\frac{b}{1+b}} \quad (*)$$

التمرين الأول: أثبت أنّ الفضاء (S,d) فضاء متري ؟

الحل: لنتحقق من شروط الفضاء المتري:

① $d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}\ge 0$ واضح من التعريف

② $d(x,y)=0 \quad ; \quad x=\xi_n\in S \ \&\ y=\eta_n\in S$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}=0$$

من أجل $n=0,1,\dots$

$$\Rightarrow |\xi_n-\eta_n|=0 \Rightarrow \xi_n-\eta_n=0 \Rightarrow \xi_n=\eta_n \ ; \ n=1,2,\dots$$

$$\Rightarrow x=y$$

③ $$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|-(\eta_n-\xi_n)|}{1+|-(\eta_n-\xi_n)|}$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - z_n|}{1+|x_n - z_n|} = d(y,x)$$

④ $\forall x = \xi_n \in S \;\&\; y = x_n \in S \;\&\; z = \gamma_n \in S$

$$d(x,y) \overset{??}{\leq} d(x,z) + d(z,y)$$

لدينا $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - z_n|}{1+|\xi_n - x_n|}$

$$|\xi_n - x_n| = |\xi_n - \gamma_n + \gamma_n - x_n| \leq |\xi_n - \gamma_n| + |\gamma_n - x_n| = |x_n - z_n|$$

أصبح لدينا: $|\xi_n - x_n| \leq |\xi_n - \gamma_n| + |\gamma_n - x_n| \leq |x_n - z_n|$

حسب الملاحظة ⊛

$$\frac{|\xi_n - x_n|}{1+|\xi_n - x_n|} \leq \frac{|\xi_n - \gamma_n| + |\gamma_n - x_n|}{1+|\xi_n - \gamma_n| + |\gamma_n - x_n|} =$$

$$\leq \frac{|\xi_n - \gamma_n|}{1+|\xi_n - \gamma_n| + |\gamma_n - x_n|} + \frac{|\gamma_n - x_n|}{1+|\xi_n - \gamma_n| + |\gamma_n - x_n|}$$

$$\frac{|\xi_n - \gamma_n|}{1+|\xi_n - \gamma_n|} + \frac{|\gamma_n - x_n|}{1+|\gamma_n - x_n|}$$

وبالتالي أصبح لدينا:

$$\frac{|\xi_n - x_n|}{1+|\xi_n - x_n|} \leq \frac{|\xi_n - \gamma_n|}{1+|\xi_n - \gamma_n|} + \frac{|\gamma_n - x_n|}{1+|\gamma_n - x_n|}$$

نضرب طرفي المتراجحة بالعدد $\frac{1}{2^n}$ ونأخذ المجموع من $n=1$ إلى ∞

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\xi_n - x_n|}{1+|\xi_n - x_n|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n - \gamma_n|}{1+|\xi_n - \gamma_n|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\gamma_n - x_n|}{1+|\gamma_n - x_n|}$$

$$\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بعد مناقشة الشروط ① و ② و ③ و ④ نجد أنّ ℓ^p فضاء جزئي

بعض المتراجحات المساعدة والمتراجحات الأساسيّة في الفضاء ℓ^p :

أولاً: المتراجحة المساعدة:

$$\alpha.\beta \le \int_0^{\alpha} t^{p-1}\,dt + \int_0^{\beta} u^{q-1}\,du = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

حيث α و β عددين كيفيين موجبين

- ندعو العددين p و q المرتبطان بالعلاقة: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ بالأسس المترافقين (فضاء المتتاليات ℓ^p مترافق مع الفضاء المتتاليات ℓ^q)

- لدينا:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p}=\frac{q-1}{q} \Rightarrow pq-p=q \Rightarrow$$

$$pq-p-q+1=+1$$

$$p(q-1)-(1-q)=1$$

$$(q-1)(p-1)=1 \Rightarrow \boxed{p-1=\frac{1}{q-1}}$$

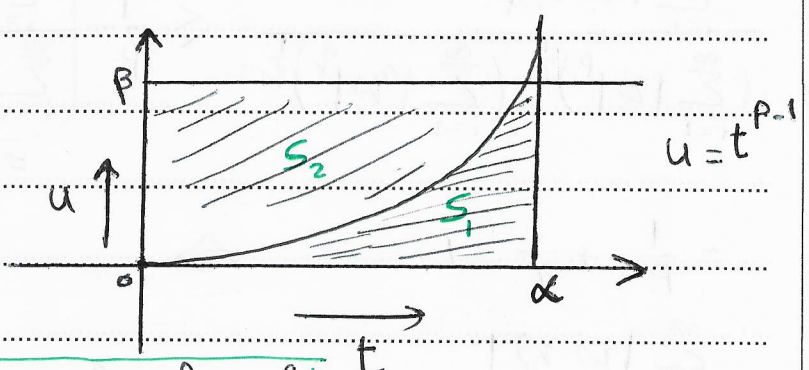
&

$$\boxed{q-1=\frac{1}{p-1}}$$

- نعود لبرهان المتراجحة المساعدة:

لنفرض أنّ $u=t^{p-1} \Leftarrow t=u^{\frac{1}{p-1}}=u^{q-1}$

ولیکن α و β عددين كيفيين موجبين بحيث يكونا بُعد المستطيل المرسوم في الشكل التّالي:



لدينا من الشكل:

$$\alpha.\beta \le S_1+S_2 = \int_0^{\alpha} t^{p-1}\,dt + \int_0^{\beta} u^{q-1}\,du$$

$$= \left[\frac{t^p}{p}\right]_0^{\alpha} + \left[\frac{u^q}{q}\right]_0^{\beta} =$$

$$\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q} \Rightarrow \boxed{\alpha.\beta \le \frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}}$$ وهي المتراجحة المساعدة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ثانياً: متراجحة هولدر للمجاميع:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

حيث $p \ge 1$ و $q \ge 1$

و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ والفضاء ℓ^p مترافق مع الفضاء ℓ^q

البرهان:

لتكن $x = (x_i)_{i\ge 1} \in \ell^p$ و $y = (y_i)_{i\ge 1} \in \ell^q$ تحققان $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ و $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q < \infty$

لنفرض أنّ:

$$\alpha = \frac{|x_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{|y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

وبالتعويض في المتراجحة المساعدة نجد أنّ: $\alpha \cdot \beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$

$$\Rightarrow \frac{|x_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{|x_i|^p}{p \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p} + \frac{|y_i|^q}{q \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q}$$

وبالجمع بالنسبة لـ i من 1 حتى اللانهاية (∞) على أطراف المتراجحة السابقة نجد أنّ:

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q}{\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q}}_{=1}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{أصبح لدينا:}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نضرب طرفي المتراجحة بـ $\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

نحصل على المتراجحة

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

وهي متراجحة هولدر للمجاميع

ثالثاً: متراجحة كوشي ـ شفارتز:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

الإثبات:

متراجحة هولدر للمجاميع:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

عندما $p=2 \Leftarrow q=2$

وبالتعويض في متراجحة هولدر للمجاميع نحصل على المتراجحة المطلوبة

تذكير: متراجحة كوشي:

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

حيث a_i و b_i أعداد حقيقية اختيارية.

رابعاً: متراجحة منكوفسكي:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i+\eta_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad ; p>1$$

لنأخذ

حيث $x=(\xi_i)_{i\ge1}\in l^p$ & $y=(\eta_i)_{i\ge1}\in l^p$ متحققان:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<\infty \quad \& \quad \sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p<\infty$$

نفرض:

$$|w_i|=|\xi_i+\eta_i| \Leftarrow |w_i|^p=|\xi_i+\eta_i|^p$$

$$|w_i|^p=|w_i|\cdot|w_i|^{p-1}=|\xi_i+\eta_i|\cdot|w_i|^{p-1}$$

$$\Rightarrow |w_i|^p \le (|\xi_i|+|\eta_i|)\cdot|w_i|^{p-1}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow |w_i|^p \le |\varepsilon_i|\cdot|w_i|^{p-1} + |\eta_i|\cdot|w_i|^{p-1}$$

نأخذ المجموع في أطراف المتراجحة السابقة من $i=1$ حتى n:

$$\sum_{i=1}^{n} |w_i|^p \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|\cdot|w_i|^{p-1}}_{①} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|\cdot|w_i|^{p-1}}_{②}$$

نطبق متراجحة هولدر للجاميع المنتهية على المجموع ① و ② في الطرف الأيمن من المتراجحة الأخيرة فنجد أنّ:

$$\sum_{i=1}^{n} |w_i|^p \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left||w_i|^{p-1}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left||w_i|^{p-1}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q + p = pq \Rightarrow p = pq - q \Rightarrow p = q(p-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |w_i|^p \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

نقسم الطرفين على: $\left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ فنجد أنّ:

$$\sum_{i=1}^{n} |w_i|^p \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

وبالتالي:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

حيث $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$

ونجعل n في أطراف المتراجحة السابقة $n \to \infty$ نحصل على متسلسلات متقاربة في كلا الطرفين لأنّ:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

l^p متتاليات من الفضاء $y=(y_i)_{i\geq 1}$ و $x=(x_i)_{i\geq 1}$

وبالتالي نحصل على المتراجحة التالية:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

وهي متراجحة منكوفسكي للمجاميع

ملاحظة:

عندما $p=1$ عندئذٍ فإنّ متراجحة منكوفسكي تُعطى من متراجحة المثلث للأعداد وهي:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i+b_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|a_i| + \sum_{i=1}^{\infty}|b_i|$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة