كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : الثانية /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التمرين الأول: $B(A)$ فضاء الدوال المحدودة والمعرفة على المجموعة A

بالشكل: $d(x,y)=\sup|x(t)-y(t)|$ أثبت أنّ $B(A)$

فضاء متري ؟

الحل: نتحقق من شروط الفضاء المتري:

① $\forall x,y\in B(A)$ $\quad d(x,y)\overset{?}{\geq}0$

$d(x,y)=\sup|x(t)-y(t)|\geq 0 \quad \forall t\in A$

② $\forall x,y\in B(A)$; $d(x,y)=0 \iff \sup|x(t)-y(t)|=0$

$\iff x(t)-y(t)=0 \iff x(t)=y(t)$; $t\in A$

③ $\forall x,y\in B(A)$; $d(x,y)\overset{??}{=}d(y,x)$

$d(x,y)=\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|=\sup_{t\in A}|-(y(t)-x(t))|=$

$\sup_{t\in A}|y(t)-x(t)|=d(y,x)$

④ $\forall x,y,z\in B(A)$

لنتحقق أنّ $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

لدينا $d(x,z)=\sup_{t\in A}|x(t)-z(t)|=\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)+y(t)-z(t)|\leq$

$\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|+\sup_{t\in A}|y(t)-z(t)|=d(x,y)+d(y,z)$

حسب متراجحة منكوفسكي

ممّا سبق وبما تحقق الشروط السابقة نجد أنّ $B(A)$ فضاء متري

التمرين الثاني: l^p فضاء المتتاليات العددية حيث:

أثبت أنّ $d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{\infty}|z_i-z_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$ فضاء متري؟ ℓ^p

الحل:

• لنتحقق من شروط الفضاء المتري:

① $\forall x,y\in\ell^p \quad ; \quad d(x,y)\overset{?}{\geq}0$

$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{\infty}|z_i-z_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\geq 0$

② $\forall x,y\in\ell^p$

لنتحقق أنّه إذا كان $d(x,y)=0$ فإنّ $x=y$ لدينا

$d(x,y)=0\Rightarrow\left[\sum_{i=1}^{\infty}|z_i-z_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}|z_i-z_i|^p=0$

$\Rightarrow|z_i-z_i|^p=0 \quad ; \quad i=1,2,\dots$

$\Rightarrow|z_i-z_i|=0\Rightarrow z_i-z_i=0\Rightarrow z_i=z_i$

$; \quad i=1,2,\dots\Rightarrow x=y$

③ $\forall x,y\in\ell^p \quad ; \quad d(x,y)\overset{?}{=}d(y,x)$

$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{\infty}|z_i-z_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}=\left[\sum_{i=1}^{\infty}|-(z_i-z_i)|^p\right]^{\frac{1}{p}}=$

$\left[\sum_{i=1}^{\infty}|z_i-z_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}=d(y,x)$

④ $\forall x,y,z\in\ell^p \quad ; \quad d(x,y)\overset{??}{\leq}d(x,z)+d(z,y)$

$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{\infty}|z_i-z_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}=\left[\sum_{i=1}^{\infty}|z_i-w_i+w_i-z_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\leq$

حسب متراجحة منكوفسكي:

$\left[\sum_{i=1}^{\infty}|z_i-w_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{i=1}^{\infty}|w_i-z_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}=d(x,z)+d(z,y)$

$\Rightarrow$ متراجحة المثلث محققة

بعد مناقشة الشروط السّابقة نجد أنّ ℓ^p فضاء متري

التمرين الثالث: أثبت أنّ: $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\hat{}}(x_i-y_i)^2}$ فضاء متري؟

الحل:

• لنتحقق من شروط الفضاء المتري:

① $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\hat{}}(x_i-y_i)^2}\geq 0 \quad \forall x,y\in\hat{\mathbb{R}}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② $d(x,y)=0 \iff \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=0 \iff \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=0$

$\iff (x_i-y_i)^2=0 \iff x_i-y_i=0 \iff x_i=y_i \;;\; i=1,2,\dots$

$\iff x=y$

③ $d(x,y) \overset{?}{=} d(y,x)$

$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(-(y_i-x_i))^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$

$=d(y,x)$??

④ $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i+z_i-y_i)^2} \leq$

لحساب متراجحة منكوفسكي :

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}=d(x,z)+d(z,y)$

متراجحة المثلث محققة

بعد مناقشة الشروط السابقة نجد أنّ $\mathbb{R}^n$ فضاء متري

انتهت المحاضرة