كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : الرابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تتمّة المتتاليات في الفضاءات المترية:

بينما المتتالية التي حدّها العام $x_n = \frac{1}{n}$ حيث $n = 1, 2, \ldots$ من نقط الفضاء المتري $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ هي متتالية غير محدودة لأنّه لا يمكن إيجاد كرة مفتوحة (مغلقة) في $\mathbb{R}$ تحوي جميع حدود هذه المتتالية.

- العلاقة بين المتتالية المتقاربة والمتتالية المحدودة:

نظرية: المتتالية المتقاربة والمحدودة: إذا كان $X = (X, d)$ فضاءً متريّاً حيث $X \neq \phi$ عندئذٍ فإنّ:

أولاً: كل متتالية متقاربة في X تكون محدودة ونهايتها وحيدة.

ثانياً: إذا كانت $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متتاليتان متقاربتان من نقط الفضاء X بحيث أنّ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ فإنّ $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$

البرهان:

أولاً: الفرض: $X = (X, d)$ فضاء متري و $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية كيفية من نقط الفضاء X وهي متقاربة في X من النقطة x أي: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

الطلب: أ. $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية محدودة في X

ب. المتتالية المتقاربة $(x_n)_{n\geq 1}$ من نقط الفضاء المتري X لها نهاية وحيدة.

- برهان (أ): بما أنّ $(x_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من النقطة x في الفضاء المتري X وبالتالي متى تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ ; \ \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

وبوضع $\varepsilon = 1$ نجد أنّ $d(x_n, x) < 1$ وبالتّالي جميع حدود المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تكون محتواة في كرة مفتوحة مركزها النقطة x ونصف قطرها 1 باستثناء عدد منتهٍ من هذه الحدود $x_1, x_2, \ldots, x_{N_\varepsilon - 1}$

الآن بفرض أنّ:

$$a = \max\{d(x_1, x), d(x_2, x), \ldots, d(x_{N_\varepsilon - 1}, x)\}$$

عندئذٍ نجد أنّ $d(x_n, x) < 1 + a$

أي أنّ جميع حدود هذه المتتالية محصورة ضمن كرة مفتوحة مركزها n ونصف قطرها $1+a$.

وبالتالي المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ محدودة في X بالتّالي كل متتالية متقاربة في X تكون محدودة.

• البرهان لـ (ب): نفرض أنّه للمتتالية المتقاربة $(x_n)_{n\geq 1}$ من نقط الفضاء المتري X نهايتان هما x و y أي:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \quad \& \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

$\Leftarrow d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \& \quad d(x_n, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ولنبرهن أنّ: $x = y$

بما أنّ $x_n, x, y \in X$ وبما أنّ المتراجحة التالية محققة:

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$$

وبأخذ النهايات في أطراف المتراجحة السابقة عندما $n \to \infty$ نجد أنّ:

$$\lim_{n\to\infty} d(x, y) = 0 \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

والمتتالية المتقاربة $(x_n)_{n\geq 1}$ لها نهاية وحيدة.

ثانياً: الفرض: $X = (X, d)$ فضاء متري

متتاليتان في X $\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \\ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \end{cases}$

المطلوب: $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

البرهان: بما أنّ $y_n \in X$ و x_n و y و x عندئذٍ فإنّ المتراجحة التالية محققة:

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n)} \quad (I)$$

أيضاً فإنّ $x, y, x_n, y_n \in X$

وبالتالي فإنّ المتراجحة التالية محققة:

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$$

$$\Rightarrow d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq d(x, x_n) + d(y_n, y)$$

نضرب طرفي هذه المتراجحة بـ (-1) فنجد:

$$\boxed{d(x_n, y_n) - d(x, y) \geq -\left(d(x, x_n) + d(y_n, y)\right)} \quad (II)$$

بمقارنة (I) و (II) أي:

$$-\left(d(x, x_n) + d(y, y_n)\right) \leq d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n)$$

$$\Rightarrow 0 \leq d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n)$$

وبأخذ النهايات في أطراف المتراجحة السابقة عندما $n \to \infty$ نجد أنّ:

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) - d(x, y) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$

- نتيجة للتأكيد: كل متتالية متقاربة في فضاء متري X تكون محدودة في هذا الفضاء.

- مبرهنة الملاصقة والمجموعة المغلقة: ليكن $X = (X, d)$ فضاءً متريّاً و $M \neq \phi$ بحيث أنّ $M \subseteq X$ عندئذٍ فإنّ:

1- الشرط اللازم والكافي حتى تكون $x \in \overline{M}$ (أي نقطة لاصقة لـ M) هو أن توجد متتالية $(x_n)_{n \geq 1}$ في M بحيث يكون $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

رياضياً:

$x \in \bar{M} \iff \exists x_n \in M \; ; \; n = 1, 2, \ldots \;\; \& \;\; x_n \to x$

2- الشرط اللازم والكافي حتى تكون M مغلقة هو أن تكون نهاية كل متتالية متقاربة من نقط المجموعة M هي من M

رياضياً: M مغلقة في X $\iff$ $x \in M$ & $x_n \to x$ ؛ $\forall (x_n)_{n \geq 1} \subseteq M$

مثال: في الفضاء المتري $(\mathbb{R}, |\,|)$ نجد أن المتتالية التي حدّها العام $x_n = \frac{1}{n}$ ؛ $n = 1, 2, \ldots$ هي متتالية من نقط هذا الفضاء وبالتالي

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \notin]0,1[\Rightarrow 0 \in]0,1[$

أو بالشكل: إذا أخذنا:

$M =]0,1[\subseteq \mathbb{R}$ و $X = \mathbb{R} = (\mathbb{R}, |\,|)$

عندئذٍ فإن $0 \in \bar{M}$ لأنه: توجد متتالية من نقط المجموعة M وهي: $(x_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ بحيث أن: $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ مع أن $0 \notin M$

- متتاليات كوشي:

تعريف: نقول عن المتتالية $(x_n)_{n \geq 1}$ من نقط الفضاء المتري $X = (X, d)$ أنها كوشي (متتالية أساسية) إذا تحقق الشرط التالي:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; ; \; \forall n, m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

ونتيجة هامة: المتتالية $(x_n)_{n \geq 1}$ من نقط الفضاء المتري X تكون لكوشي إذا وفقط إذا تحقق: $\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} d(x_n, x_m) = 0$

مثال:

المتتالية التي حدّها العام $x_n = \frac{1}{n}$ حيث $n = 1, 2, \ldots$ من نقط الفضاء المتري $(\mathbb{R}, |\,|)$ هي لكوشي في هذا الفضاء لأنه:

$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} d(x_n, x_m) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: عندما $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) \neq 0$ فإنّ هذه المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ لا تكون كوشي في الفضاء X، حيث $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية من نقط الفضاء X.

• خواص متتاليات كوشي:

مبرهنة: إذا كان $X=(X,d)$ فضاءً متريًا عندئذٍ فإنّ:

1. كل متتالية متقاربة في X تكون لكوشي في هذا الفضاء.
2. كل متتالية لكوشي في X تكون محدودة في هذا الفضاء.

البرهان لـ (1):

الفرض: $X=(X,d)$ فضاء متري، $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية كيفية متقاربة من نقط الفضاء X نحو النقطة x من X أي: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ في X.

الطلب: $(x_n)_{n\geq 1}$ كوشي في هذا الفضاء.

البرهان: بما أنّ $x \in X$، x_n, x_m حيث $n,m \in \mathbb{N}$ عندئذٍ فإنّ المتتالية التالية محققة: $0 \leq d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m)$

وبأخذ النهايات في أطراف المتراجحة السابقة عندما $n\to\infty$ و $m\to\infty$ نجد أنّ $\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} d(x_n, x_m) = 0$ والمتتالية الكيفية المتقاربة $(x_n)_{n\geq 1}$ هي لكوشي في الفضاء X.

وبالتالي كل متتالية متقاربة في X هي لكوشي في X.

- برهان (2) تُترك وظيفة.

• بعض الملاحظات والنتائج:

1. عكس المبرهنة السابقة أولاً ليس صحيح في الحالة العامة أي ليست كل متتالية كوشي في فضاء متري X هي متتالية متقاربة في هذا الفضاء.

مثال: في الفضاء المتري $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ إذا أخذنا المتتالية التي حدّها العام: $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ حيث $n=1,2,\dots$ هي متتالية من نقط هذا الفضاء وهي لكوشي في الفضاء $\mathbb{Q}$ لأنّ:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right| \xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty} e - e = 0$$

ولكنّها ليست متقاربة في $\mathbb{Q}$ لأنّ:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \notin \mathbb{Q}$$

2- إنّ عكس البرهنة السّابقة (بند 2) ليس صحيحاً في الحالة العامة أي ليست كل متتالية محدودة في X و X فضاء متري أن تكون تكوشي في هذا الفضاء.

مثال: المتتالية التي حدها العام $x_n = (-1)^n$ من نقط الفضاء المتري الحقيقي هي متتالية محدودة في هذا الفضاء لأنّه يمكن إيجاد كرة مفتوحة مركزها 0 ونصف قطرها 2 تحوي مدود هذه المتتالية ولكن هذه المتتالية ليست تكوشي في هذا الفضاء لأنّه:

$$d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| = |(-1)^n - (-1)^m| \xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty} 2 \neq 0$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z