كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : الرابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

ثانياً: طريقة هالي لإيجاد جذور معادلة غير خطية

وهي تطوير لطريقة نيوتن - رافسون التي تعطى بالشكل:

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

حيث سنستخدم $m=1$ من أجل الجذور البسيطة

بفرض أن الدالة $f(x) \in C^3[a,b]$

لتكن $x_k \in R$ نقطة قريبة من x بقدر كافٍ،

بالتالي نشر وفق تايلور الدالة $f(x)$ حول النقطة x_k

مع الاكتفاء بالحدود الأربعة الأولى:

$$f(x) = f(x_k) + (x-x_k)f'(x_k) + \frac{(x-x_k)^2}{2!}f''(x_k) + \frac{(x-x_k)^3}{3!}f'''(c)$$

$c \in [a,b]$ و

بفرض أن r هو الجذر الدقيق للمعادلة $f(x)=0$

نعوض في *:

$$0 = f(r) = f(x_k) + (r-x_k)f'(x_k) + \frac{(r-x_k)^2}{2!}f''(x_k) + \frac{(r-x_k)^3}{3!}f'''(c)$$

ونحذف الحد الأخير من المعادلة السابقة $x_{k+1} \simeq r$

وبالتعويض سنحصل على:

$$0 = f(x_k) + (x_{k+1}-x_k)f'(x_k) + \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2!}f''(x_k)$$

$$(x_{k+1}-x_k)\left[f'(x_k) + \frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k)f''(x_k)\right] = -f(x_k)$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{-f(x_k)}{[f'(x_k) + \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k) f''(x_k)]}$$

من قانون نيوتن - رافسون

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{m}{2}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} f''(x_k)}$$

أو $$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k) f(x_k)}{(f'(x_k))^2 - \frac{m}{2} f(x_k) f''(x_k)}$$

مثال: استخدم طريقة هالي لإيجاد الجذر التقريبي البسيط للمعادلة $3x + \sin x - e^x = 0$ علماً بأن $x_0 = 0$ وكتقريب x_n التي تحقق المعيار $|f(x_n)| < 10^{-5}$

الحل:

$$f(x) = 3x + \sin x - e^x \Rightarrow f(0) = -1$$

$$f'(x) = 3 + \cos x - e^x \Rightarrow f'(0) = 3 \qquad m = 1$$

$$f''(x) = -\sin x - e^x \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0) f'(x_0)}{(f'(x_0))^2 - \frac{m}{2} f(x_0) f'(x_0)} = 0 - \frac{-3}{9 - \frac{1}{2}(1)} \simeq 0.35294$$

$|f(x_1)| \simeq 0.01876 > 10^{-5}$ لم يتحقق معيار التوقف

$f(x_1) \simeq -0.01876$, $f'(x_1) \simeq 2.51511$, $f''(x_1) \simeq -1.7689$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) f'(x_1)}{(f'(x_1))^2 - \frac{m}{2} f(x_1) f''(x_1)} \simeq 0.36041$$

$|f(x_2)| \simeq 2.92 \times 10^{-5} < 10^{-5}$ تحقق شرط التوقف

فالجذر المطلوب هو $x_2 \simeq 0.36041$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إيجاد جذور جملة المعادلات غير الخطية

لتكن لدينا جملة المعادلات غير الخطية:

$$(1)\quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

يمكن إعادة كتابة الجملة (1) بالشكل:

$$(2)\quad F(X) = 0$$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$$

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

تعريف الجذر: نقول إن الشعاع الحقيقي $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ جذراً (حلاً) لجملة المعادلات (1) أو الكمائنة (2) إذا كان $F(\bar{X}) = 0$ ويدعى $\bar{X}$ صفراً للدالة.

أولاً: تم استخدام طريقة نيوتن لحل الجملة (1) أو الكمائنة (2) بالشكل:

$$X_{k+1} = X_k - W^{-1}(X_k) F(X_k)$$

حيث $W(X) = F'(X)$ هي مصفوفة ياكوبي للدالة $F(X)$:

$$W(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حل تقريبي لجملة المعادلتين غير الخطيتين:

$$\begin{cases} xy + y^2 = 2 \\ x^2 - 2xy = -1 \end{cases}$$

مبتدئاً بالحل $X_0 = (1, 0.5)^T$ ومكتفياً بـ X_1 واحسب $\|F(X_1)\|$.

الحل:

$$f_1(x,y) = xy + y^2 - 2$$
$$f_2(x,y) = x^2 - 2xy + 1$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad F(X_0) = \begin{bmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(1, 0.5) \\ f_2(1, 0.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = X_0 - W^{-1}(X_0) F(X_0)$$

$$W(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x + 2y \\ 2x - 2y & -2x \end{bmatrix}$$

$$W(X_0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det W(X_0) = -3$$

$$W^{-1}(X_0) = \frac{1}{\det W(X_0)} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.25 \\ 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1.1665 \\ 1.0833 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$F(X_1) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, y_1) \\ f_2(x_1, y_1) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0.4374 \\ -0.16667 \end{bmatrix}$$

$$\| F(X_1) \| = \sqrt{(0.4374)^2 + (-0.16667)^2} \simeq 0.4680$$

من عيوب طريقة نيوتن لإيجاد جذور جملة المعادلات غير الخطية هي أنها تحتاج إلى إيجاد قيم مقلوب مصفوفة ماكوبي $W(X)$ من أجل كل تكرار وهذا يشكل عبء حسابي كبير و لتفادي هذا العبء الحسابي و عدد العمليات الكبيرة خاصة عندما يكون عدد المعادلات كبير نسبياً، تم تعديل طريقة نيوتن لتصبح كالآتي:

ثانياً:

$$X_{k+1} = X_k - W^{-1}(X_0) F(X_k)$$

وهي طريقة نيوتن المعدلة وفي هذه التكرارية سيتم حساب مقلوب مصفوفة ماكوبي مرة واحدة عند $X = X_0$، و سيثبت هذا المقلوب في جميع التكرارات التالية.

مثال: استخدم طريقة نيوتن المعدلة لإيجاد جذر تقريبي لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} xy + x^2 = 3 \\ xy + y = 4 \end{cases} \qquad X_0 = (1.5, 1.5)^T$$

بحيث مع الاكتفاء بحساب X_2 و $\| F(X_2) \|$.

الحل:

$$X_{k+1} = X_k - W^{-1}(X_0) F(X_k)$$

$$X_1 = X_0 - W^{-1}(X_0) F(X_0)$$

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy + x^2 - 3 \\ xy + y - 4 \end{bmatrix}, \quad F(X_0) = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$W(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+2x & x \\ y & x+1 \end{bmatrix}$$

$$W(X_0) = \begin{bmatrix} 4.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det W(X_0) = 9$$

$$W^{-1}(X_0) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2.5 & -1.5 \\ -1.5 & 4.5 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0.27778 & -0.16667 \\ -0.16667 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.27778 & -0.16667 \\ -0.16667 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.25 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1.04167 \\ 1.875005 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = X_1 - W^{-1}(X_0)\,F(X_1) \simeq \begin{bmatrix} 1.0024 \\ 1.9673 \end{bmatrix}$$

$$F(X_2) \simeq \begin{bmatrix} -0.0231 \\ -0.0605 \end{bmatrix}$$

$$\| F(X_2) \| = \sqrt{(-0.0231)^2 + (-0.0605)^2} \simeq 0.064908$$

* بفرض أننا استطعنا كتابة جملة المعادلات (1) بالشكل:

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 = l_1(x_1, \dots, x_n) \\ x_2 = l_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n = l_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

ويمكن إعادة كتابتها بالشكل:

$$(4)\quad X = L(X)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حيث

$$L(X)=\begin{bmatrix} l_1(X) \\ l_2(X) \\ \vdots \\ l_n(X) \end{bmatrix}$$

$$l_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$i=1,\dots,n$$

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

تعريف النقطة الثابتة: هي النقطة

$$P=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

تحقق الشروط التالية:

$$(5)\begin{cases} p_1 = l_1(p_1,\dots,p_n) \\ p_2 = l_2(p_1,\dots,p_n) \\ \vdots \\ p_n = l_n(p_1,\dots,p_n) \end{cases}$$

ملاحظة ① إن النقطة الثابتة p لجملة المعادلات (3) هي تحقق جملة المعادلات (1) أي:

$$\begin{cases} f_1(p_1,p_2,\dots,p_n)=0 \\ f_2(p_1,p_2,\dots,p_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(p_1,p_2,\dots,p_n)=0 \end{cases}$$

p جذر للجملة (1)

② إن إيجاد النقطة الثابتة p للجملة (3) بشكل دقيق ليس متاح دائماً بالطرق المعروفة ولهذا سنبحث عن الطرق التقريبية لإيجاد نقطة قريبة من النقطة الثابتة بقدر كاف، كما سنرى لاحقاً.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة