كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : الثالثة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

نشور دالة f في جوار x_0 وفق تايلور:

$$f(x) = f_0 + \frac{x-x_0}{1!}f'_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''_0 + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}_0$$

$$+ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \quad \text{و} \quad c \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\quad \text{و} \quad \delta > 0$$

$$|f(x) - p_n(x)| = \left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\right|$$

استيفاء هيرميت التكعيبي

$$H_3(x) = \sum_{j=0}^{1} S_j(x) f_j + \sum_{j=0}^{1} R_j(x) f'_j$$

الخطأ المطلق

$$E(x) = |H_3(x) - f(x)|$$

الخطأ المتقطع

$$E_T(x) \leq \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}{(3+1)!}f^{(3+1)}(c)$$

$$c \in [x_0, x_1]$$

إن x_0 و x_1 هي جذور مضاعفة لـ $E_T(x)$

مثال: أوجد كثيرة حدود هيرميت التكعيبية للدالة $f(x) = x^4 - x^3 - x + 1$ في النقطتين $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ واحسب قيمة تقريبية للدالة عند $x = 0.5$، واحسب الخطأ المتقطع الأعظمي عند $x = 0.5$

الحل:

$$H_3(x) = \sum_{j=0}^{1} S_j(x) f_j + \sum_{j=0}^{1} R_j(x) f'_j$$

$$= S_0 f_0 + S_1 f_1 + R_0 f'_0 + R_1 f'_1$$

TEL:0931497960 - (جامعة طرطوس) كلية العلوم - مكتبة A to Z

x_j	$x_0=0$	$x_1=1$
f_j	$f_0=1$	$f_1=0$
f'_j	$f'_0=-1$	$f'_1=0$

$f'(x)=4x^3-3x^2-1$

$S_0(x)=[1-2(x-x_0)L'_0(x_0)]L^2_0(x)$

$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=1-x \Rightarrow L'_0(x)=-1$

$S_0(x)=[1-2(x-0)(-1)](1-x)^2=2x^3-3x^2+1$

$R_0(x)=(x-x_0)L^2_0(x)=x(1-x)^2=x-2x^2+x^3$

$H_3(x)=S_0f_0+R_0f'_0=x^3-x^2-x+1$

الخطأ المتقطع: $E_T(0.5)=\frac{(0.5-0)^2(0.5-1)^2}{4!}f^{(4)}(c)$

و $c\in[0,1]$

$f''(x)=12x^2-6x \Rightarrow f'''(x)=24x-6 \Rightarrow f^{(4)}(x)=24=f^{(4)}(c)$

$E_T(0.5)\simeq 0.0625$

قيمة تقريبية للدالة: $H_3(0.5)\simeq 0.375$

الخطأ المطلق: $|f(0.5)-H_3(0.5)|\simeq 0.0625$

وظيفة: أوجد كثيرة حدود هيرميت للدالة معلومة في الجدول التالي:

x_i	0	1
y_i	0	1
y'_i	-1	4

واحسب قيمة تقريبية لها عند $x=0.5$

استيفاء هيرميت التكعيبي الشرائحي

هو استيفاء لدالة بمتتالية من كثيرات حدود هيرميت التكعيبة تدعى كل كثيرة حدود من هذه المتتالية بـ (شريحة) رياضياً.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لتكن دالة $f \in C^1[x_0, x_n]$ و $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ متتالية من الأعداد الحقيقية المختلفة وقيم الدالة f معلومة في النقاط x_k لنأخذ التجزئة للمجال $[x_0, x_n]$ كالتالي:

$[x_0, x_1]$ ، $[x_1, x_2]$ ، ..... ، $[x_{i-1}, x_i]$ ، ..... ، $[x_{n-1}, x_n]$

لدينا n مجال جزئي، نوجد سُدسية فوق كل مجال

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x) & ; \quad x \in [x_0, x_1] \\ H_2(x) & ; \quad x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ H_i(x) & ; \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \vdots & \\ H_n(x) & ; \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

$H_i(x)$ هي كثيرات حدود هيرميت التكعيبة السُدسية تحقق الخواص الآتية:

$$\begin{cases} H_i(x_i) = f_i \\ H'_i(x_i) = f'_i \end{cases} \qquad \begin{cases} H_i(x_{i-1}) = f_{i-1} \\ H'_i(x_{i-1}) = f'_{i-1} \end{cases}$$

حيث

$$H_1(x) = \sum_{j=0}^{1} S_j(x) f_j + \sum_{j=0}^{1} R_j(x) f'_j$$

$$H_2(x) = \sum_{j=1}^{2} S_j(x) f_j + \sum_{j=1}^{2} R_j(x) f'_j$$

$$\vdots$$

$$H_i(x) = \sum_{j=i-1}^{i} S_j(x) f_j + \sum_{j=i-1}^{i} R_j(x) f'_j$$

نذكر خصائص S_j و R_j:

$$S_j(x_i) = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases} \qquad S'_j(x) = 0 \quad \forall i, j$$

$$R_j(x_i) = 0 \qquad R'_j(x_i) = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: أوجد استيفاء هيرميت الشرائحي للدالة المعرفة بالجدول الآتي:

x_i	0	1	2
y_i	1	0	4
y'_i	−2	1	8

ثم أوجد قيمة تقريبية عند $x = 0.5$ و $x = 1.5$

الحل:

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x) ; x \in [0,1] \\ H_2(x) ; x \in [1,2] \end{cases}$$

$$H_1(x) = \sum_{j=0}^{1} S_j(x) f_j + \sum_{j=0}^{1} R_j(x) f'_j = S_0 f_0 + S_1 f_1 + R_0 f'_0 + R_1 f'_1$$

في المجال $[0,1]$ المطلوب حساب: S_0 ، R_1 ، R_0

بما أنه $f_1 = 0$ لا داعي لحساب S_1

$$S_0(x) = [1 - 2(x - x_0) L'_0(x_0)] L_0^2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 1}{0 - 1} = 1 - x \Rightarrow L'_0(x) = -1$$

$$S_0(x) = (1 + 2x)(1 - x)^2$$

$$R_0(x) = (x - x_0) L_0^2(x) = x(1 - x)^2$$

$$R_1(x) = (x - x_1) L_1^2(x) = (x - 1) x^2$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = x$$

$$H_1(x) = x^3 - 2x + 1$$

$$H_2(x) = \sum_{j=1}^{2} S_j(x) f_j + \sum_{j=1}^{2} R_j(x) f'_j = S_1 f_1 + S_2 f_2 + R_1 f'_1 + R_2 f'_2$$

في المجال $[1,2]$ المطلوب حساب: S_2 ، R_1 ، R_2

$$S_2(x) = [1 - 2(x - x_2) L'_2(x_2)] L_2^2(x)$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = x - 1 \Rightarrow L'_2(x) = 1$$

$$S_2(x) = (1 - 2x + 4)(x - 1)^2$$

$$R_1(x) = (x - x_1) L_1^2(x) = (x - 1)(2 - x)^2$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = 2 - x$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$R_2(x) = (x - x_2)\, L_2^2(x) = (x - 2)(x - 1)^2$

$H_2(x) = x^3 - x^2$

$$H(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1 & ; x \in [0,1] \\ x^3 - x^2 & ; x \in [1,2] \end{cases}$$

$H_1(0.5) = 0.125$

$H_2(1.5) = 1.125$

ملاحظة: نلاحظ أنه في نقاط الاتصال تكون كثيرة حدود هيرميت الشرائحية مستمرة.

إيجاد جذور المعادلات غير الخطية بمتغير واحد

لتكن لدينا المعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ حيث $x \in \mathbb{R}$ و $f(x)$ دالة غير خطية، قدمنا في تحليل عددي (1) مجموعة من الطرائق لحل المعادلة $f(x) = 0$ وهي:

طريقة تنصيف المجال - طريقة نيوتن - رافسون - طريقة التقريبات المتتالية

تعريف: نقول إن المعادلة $f(x) = 0$ تأخذ جذراً مضاعفاً m مرة عند $x = r$ إذا تحققت التالية:

$$f(r) = f'(r) = f''(r) = \dots = f^{(m-1)}(r) = 0$$

وكان $f^{(m)}(r) \neq 0$

أولاً: تم تطوير طريقة نيوتن - رافسون لإيجاد الجذر المضاعف m مرة وفق القانون التكراري الآتي:

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

حيث m عدد مرات مضاعفة الجذر

وإذا كان الجذر بسيط فإن $m = 1$ إذ أننا سنكتفي بالجذر التقريبي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

x_n الذي يحقق أحد المعيارين:

$|f(x_n)| < \varepsilon$ أو $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

وهما شرط توقف الخوارزمية.

مثال: استخدم طريقة نيوتن - رافسون لإيجاد الجذر المضاعف ثلاث مرات للمعادلة $(\cos(x)-1)^3 = 0$ علماً بأن $x_0 = 1$ وأن k ستتوقف عند التكرار الذي يحقق الشرط:

$$|f(x_n)| < 1.E-8 = 10^{-8}$$

الحل: $m = 3$;

$$x_{k+1} = x_k - 3\frac{(\cos(x_k)-1)^3}{-3\sin(x_k)(\cos(x_k)-1)^2}$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\cos(x_k)-1}{\sin x_k}$$

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos x_0 - 1}{\sin x_0} \simeq 0.45369 \qquad |f(x_1)| \simeq 0.0010035 > 10^{-8}$$

$$x_2 = x_1 + \frac{\cos x_1 - 1}{\sin x_1} \simeq 0.22287 \qquad |f(x_2)| \simeq 0.0000151 > 10^{-8}$$

$$x_3 = x_2 + \frac{\cos x_2 - 1}{\sin x_2} \simeq 0.11097 \qquad |f(x_3)| \simeq 2.327 \times 10^{-7} > 10^{-8}$$

$$x_4 = x_3 + \frac{\cos x_3 - 1}{\sin x_3} \simeq 0.05542 \qquad |f(x_4)| \simeq 3.6188 \times 10^{-9} < 10^{-8}$$

تحقق شرط التوقف بالتالي الجذر التربيعي المطلوب هو $x_4 \simeq 0.05542$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z