كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : الاولى /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

1) ليكن لدينا الحلقة $\mathbb{Z}[x]$ حلقة كثيرات الحدود فوق مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$، والمطلوب:

أثبت أن: $I = \langle x \rangle = \{ x f(x) \; ; \; f(x) \in \mathbb{Z}[x] \}$ إيديال أولي في $\mathbb{Z}[x]$.

الحل: ليكن $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ ، $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in \mathbb{Z}[x]$

وليكن $f(x) g(x) \in I$ ولنثبت أن $f(x) \in I$ أو $g(x) \in I$

$f(x) \cdot g(x) = (a_0 + a_1 x + \dots)(b_0 + b_1 x + \dots) = a_0 b_0 + \dots$

وبما أن $f(x) g(x) \in I$ فإن:

$f(x) g(x) = x h(x) \; ; \; h(x) \in \mathbb{Z}[x] \Rightarrow a_0 b_0 = 0$

وبما أن $\mathbb{Z}$ سامة صحيحة نجد إما: $a_0 = 0 \Leftarrow f(x) \in I$

أو $b_0 = 0 \Leftarrow g(x) \in I$

وبالتالي I إيديال أولي:

2) أوجد كل من $q(x)$ و $r(x)$ حيث $f(x) = g(x) q(x) + r(x)$

حيث $g(x) = x^2 + 2x - 3$ ، $f(x) = x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 3x + 2$

في الحلقة $\mathbb{Z}_7[x]$.

الحل: ناتج القسمة: $q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x - 2$

باقي القسمة: $r(x) = 4x - 4$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x - 2$$

$$x^2 + 2x - 3 \;\Big|\; x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 3x + 2$$

$$\mp x^6 \mp 2x^5 \pm 3x^4$$

$$0 + x^5 + 3x^4 + 4x^2 - 3x + 2$$

$$\mp x^5 \mp 2x^4 \pm 3x^3$$

$$0 + x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x + 2$$

$$\mp x^4 \mp 2x^3 \pm 3x^2$$

$$0 + x^3 + 0 - 3x + 2$$

$$\mp x^3 \mp 2x^2 \pm 3x$$

$$0 - 2x^2 + 0 + 2$$

$$\pm 2x^2 \pm 4x \mp 6$$

$$0 + 4x - 4$$

3 ليكن p و q عددين أوليين مختلفين والمطلوب:

أثبت أن $p(x) = px + q$ لا مختزلة في الحلقة $\mathbb{Z}[x]$.

الحل العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{Z}[x]$ هي $\{1, -1\}$

* نلاحظ أولاً أن $p(x)$ عنصر غير قابل للقلب في $\mathbb{Z}[x]$
* نفرض جدلاً أن $p(x)$ مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$ عندئذ:

$$p(x) = g(x)\,h(x) \quad ; \quad g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

حيث $h(x)$ غير قابلة للقلب في $\mathbb{Z}[x]$

و $g(x)$ غير قابلة للقلب في $\mathbb{Z}[x]$

بما أن $\mathbb{Z}[x]$ سامة صحيحة فإن:

$$\deg p(x) = \deg g(x) + \deg h(x)$$

$$1 = \deg g(x) + \deg h(x)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحالة الأولى: $\deg h(x) = 1$, $\deg g(x) = 0$

$\Rightarrow h(x) = a_1 x + b_1 \; ; \; a_1 \neq 0$ & $g(x) = b \neq 0$

$p(x) = g(x)\,h(x) = b(a_1 x + b_1) = a_1 b\, x + b b_1$

$p = a_1 b \Rightarrow b \mid p$, $q = b b_1 \Rightarrow b \mid q$

$b \mid \gcd(p, q) \Rightarrow b \mid 1 \Rightarrow b \in \{-1, 1\}$

$\Leftarrow g(x)$ عنصر قابل للقلب في $\mathbb{Z}[x]$ وهذا تناقض.

الحالة الثانية: $\deg h(x) = 0$, $\deg g(x) = 1$

وبنفس الأسلوب نجد أن $h(x)$ عنصر قابل للقلب في $\mathbb{Z}[x]$

وهذا تناقض.

نستنتج مما سبق أن الفرض الجدلي خاطئ، وبالتالي $p(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$.

4 لتكن لدينا الحلقة $\mathbb{C}[x]$ حيث $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد العقدية

والمطلوب: ① أوجد العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{C}[x]$.

② أوجد باقي قسمة: $p(x) = x^5 + (1+i)x + 3$ على $x + i$.

③ أوجد قيمة λ و k التي تجعل: $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - kx + \lambda$

تقبل القسمة على $x - i$ و $x + i$ في $\mathbb{C}[x]$.

الحل ① العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{C}[x]$ هي $\mathbb{C} / \{0\}$

② باقي القسمة هو y

$y = p(-i) = (-i)^5 + (1+i)(-i) + 3 = 4 - 2i$

③ $x - i$ قاسم لـ $g(x)$ عندئذ $g(i) = 0$

$\Rightarrow 2i - 3 - ki + \lambda = 0 \Rightarrow -ki + \lambda = 2i + 3 \quad \ldots (1)$

$x + i$ قاسم لـ $g(x)$ عندئذ $g(-i) = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow 2i - 3 + ki + \lambda = 0 \Rightarrow ki + \lambda = -2i + 3 \quad \ldots (2)$

بجمع (1) و (2) نجد $2\lambda = 6 \Leftarrow \lambda = 3$ نعوض في (1) نجد:

$-ki + 3 = 3 + 2i \Rightarrow k = -2$

5 $Z_4[x]$ حيث $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$، والمطلوب:

① أوجد ناتج $(2x+1)(2x+1)$ ماذا ستستنتج؟!

② هل $f(x) = 2x+1$ كثيرة حدود مختزلة أم لا؟!

الحل ①

$(2x+1)(2x+1) = 0x^2 + 2x + 2x + 1$

$= 0x^2 + 0x + 1 = 1$

نلاحظ أن $(2x+1)$ عنصر قابل للقلب في $Z_4[x]$.

② بما أن $f(x) = 2x+1$ كثيرة حدود قابلة للقلب في $Z_4[x]$ فهي مختزلة في $Z_4[x]$.

6 أثبت أن الإيديال:

$I = \{x f(x) + 2g(x) \; ; \; f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$

ليس إيديال رئيسي في $\mathbb{Z}[x]$، وماذا تستنتج؟!

الحل $1 \notin I$ لنفرض جدلاً أن $1 \in I$

$\Rightarrow 1 = x f(x) + 2g(x) \; ; \; f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$1 = x(a_0 + a_1 x + \ldots) + 2(b_0 + b_1 x + \ldots)$

$1 = 2b_0 \Rightarrow b_0 = \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ هذا مرفوض

* نفرض جدلاً أن I إيديال رئيسي في $\mathbb{Z}[x]$

$\Rightarrow I = \langle h(x) \rangle \; ; \; h(x) \in \mathbb{Z}[x]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

① لدينا $2 \in I$ لأن $2 = x \times 0 + 2 \times 1$ بالتالي:

$$2 = h(x)\, k(x)$$

② لدينا $x \in I$ لأن $x = x \times 1 + 2 \times 0$ بالتالي:

$$x = h(x)\, d(x)$$

عندئذ $2x = (h(x)\, k(x))\, x = 2(h(x)\, d(x))$

ومنه $k(x) \cdot x = 2\, d(x)$ ✱

بالتالي الأمثال $k(x)$ أعداد زوجية و:

$k(x) = 2r(x)$; $r(x) \in \mathbb{Z}[x]$

عندئذ بالتعويض في ✱

$$x(2r(x)) = 2\, d(x)$$

$$2\, d(x) = 2\, r(x)\, h(x)\, d(x)$$

إيديال $1 = r(x)\, h(x) \in I$

$\mathbb{Z}[x]$ ⊃ I

هذا مرفوض $\Rightarrow 1 \in I$

بالتالي I إيديال ليس رئيسي ونستنتج أن $\mathbb{Z}[x]$ ليست ساحة إيديالات رئيسية.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة