كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : الثامنة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

3- ندرس في هذه المرهنة وضع كثيرات الحدود ذات الدرجة 2 أو 3 و المعرفة فوق الحقل $F[x]$ فيما إذا كانت مختزلة أم لا.

برهنة: F حقل و $f(x) \in F[x]$ ، $\deg f(x) = 2$ or 3

عندئذ $f(x)$ مختزلة في $F[x] \Leftrightarrow f(x)$ تملك جذر في F

البرهان $\Leftarrow$ لدينا فرضاً $f(x)$ مختزلة في $F[x]$

$f(x) = g(x) \times h(x)$

$0 < \deg g(x) < \deg f(x)$ و $0 < \deg h(x) < \deg f(x)$

بما أن F سامة صحيحة، عندئذ:

$\deg f(x) = \deg g(x) + \deg h(x)$

وبما أن $\deg f(x) = 2$ or 3

عندئذ واحدة على الأقل من كثيرتي الحدود $g(x)$ و $h(x)$ درجتها تساوي 1

* لنفرض أن $\deg g(x) = 1$

$\Rightarrow g(x) = ax + b$; $a, b \in F$, $a \neq 0$

$g(x)$ جذر لـ $\alpha = -b\,a^{-1} \in F$

$\Leftarrow g(\alpha) = 0 \Leftarrow f(\alpha) = 0$

* كذلك الأمر إذا كانت $\deg h(x) = 1$

مما سبق نجد أن $f(x)$ تملك صفر في F.

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$\Rightarrow$ لدينا فرضاً $f(x)$ تملك جذر في F ولكن $\alpha \in F$

عندئذ $(x-\alpha) \in F[x]$ ، $(x-\alpha) \mid f(x)$

$\Rightarrow \exists\ \varphi(x) \in F[x]\ ;\ f(x) = (x-\alpha)\,\varphi(x)$

وبما أن $\deg f(x) = 2 \text{ or } 3$ عندئذ :

$0 < \deg(x-\alpha) < \deg f(x)$

$0 < \deg \varphi(x) < \deg f(x)$

بالتالي $f(x)$ مختزلة في $F[x]$.

نستنتج من البرهنة السابقة البرهنة التالية :

برهنة F حقل ، $f(x) \in F[x]$ ، $\deg f(x) = 2 \text{ or } 3$

عندئذ $f(x)$ لا مختزلة في $F[x]$

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ لا تملك جذر في F

مثال $f(x) = x^2 + 1 \in Z_3[x]$ حيث $Z_3 = \{0,1,2\}$ (حقل)

هل $f(x)$ مختزلة أم لا في $Z_3[x]$.

الحل Z_3 حقل ، $\deg f(x) = 2$

$f(0) = 1 \neq 0$ ، $f(1) = 2 \neq 0$ ، $f(2) = 2 \neq 0$

نلاحظ بأن $f(x)$ لا تملك جذراً في Z_3 بالتالي $f(x)$ لا مختزلة في $Z_3[x]$.

مثال $f(x) = x^2 + 1 \in Z_5[x]$ حيث $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ (حقل)

هل $f(x)$ مختزلة أم لا في $Z_5[x]$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: Z_5 حقل ، $\deg f(x) = 2$

$f(0) = 1 \neq 0$ ، $f(1) = 2 \neq 0$ ، $f(2) = 0$ ، $f(3) = 0$ ،

$f(4) = 2 \neq 0$

نلاحظ أن $f(x)$ تملك جذرين هما $\{2, 3\}$ في Z_5

بالتالي $f(x)$ مختزلة في $Z_5[x]$

مثال: $g(x) = x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ مختزلة أم لا في $\mathbb{Q}[x]$.

الحل: $\mathbb{Q}$ حقل ، $\deg g(x) = 2$

أصفار $g(x)$ هي: $\{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\}$

نلاحظ أن $g(x)$ لا تملك جذور في $\mathbb{Q}$ $-\sqrt{3}, +\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

بالتالي $g(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$.

مثال: هل $h(x) = 2x^2 + 4$ مختزلة أم لا في $\mathbb{Q}[x]$.

الحل: $\mathbb{Q}$ حقل ، $\deg h(x) = 2$

أصفار (جذور) $h(x)$ هي: $\{-\sqrt{2}i, +\sqrt{2}i\}$

$-\sqrt{2}i, +\sqrt{2}i \notin \mathbb{Q}$

بالتالي $h(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$ كونها لا تملك جذور في $\mathbb{Q}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة: ليكن F حقلاً، $a \in F$ ، $f(x) \in F[x]$

عندئذ: ① إذا كانت كثيرة الحدود $af(x)$ لا مختزلة في $F[x]$ فإن $f(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة فوق $F[x]$ بالتالي.

② إذا كانت كثيرة الحدود $f(a+x)$ لا مختزلة فوق $F[x]$ فإن $f(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة فوق $F[x]$ بالتالي.

③ إذا كانت كثيرة الحدود $f(a \cdot x)$ لا مختزلة فوق $F[x]$ فإن $f(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة فوق $F[x]$ بالتالي.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z