كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : السابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مثال: لتكن لدينا الحلقة $Z_8[x]$ حيث $Z_8=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

① أوجد ناتج المقدار التالي في $Z_8[x]$: $(4x+1)(4x+1)$

② هل $f(x)=4x+1$ كثيرة حدود مختزلة أم لا في $Z_8[x]$.

الحل ①

$$(4x+1)(4x+1)=16x^2+8x+1=1$$

② نلاحظ من الطلب السابق أن $f(x)=4x+1$ عنصر قابل للقلب في $Z_8[x]$ بالتالي $f(x)$ كثيرة حدود مختزلة في $Z_8[x]$ (مختزلة فوق $Z_8[x]$).

* المبرهنة التالية تبين لنا أنه في حلقة كثيرات الحدود فوق أي ساحة صحيحة لا توجد كثيرات حدود قابلة للقلب درجتها أكبر من الصفر.

تمهيدية 1: لتكن R ساحة صحيحة و $0\neq f(x)\in R[x]$

إذا كانت $f(x)$ قابلة للقلب في $R[x]$ عندئذ: $\deg f(x)=0$

البرهان: $f(x)$ قابلة للقلب في $R[x]$ عندئذ يوجد

$$0\neq g(x)\in R[x] \qquad f(x)\,g(x)=1$$

بما أن R ساحة صحيحة $\Leftarrow R[x]$ ساحة صحيحة

$$\deg(f(x)\,g(x))=\deg(1)$$

$$\deg f(x)+\deg g(x)=0$$

بالتالي $\deg f(x)=\deg g(x)=0$

وهو المطلوب $\deg f(x)=0$

ملاحظة إذا كان لدينا كثيرة حدود $0 \neq f(x) \in R[x]$ حيث R ساحة صحيحة و $\deg f(x) > 0$ عندئذ $f(x)$ غير قابلة للقلب في $R[x]$.

ملاحظة عكس المبرهنة 1 غير صحيح بصورة عامّة ونوضح ذلك بمثال: $f(x) = 3 \in \mathbb{Z}[x] \Rightarrow \deg f(x) = 0$ ولكن $f(x) = 3$ عنصر غير قابل للقلب في $\mathbb{Z}[x]$ لأن العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{Z}[x]$ هي $\{-1, 1\}$

* بينما إذا كان F حقلاً فإن عكس المبرهنة السابقة يكون صحيحاً، وهذا ما تبيّنه لنا المبرهنة التالية:

مبرهنة ليكن F حقلاً حيث $0 \neq f(x) \in F[x]$

$f(x)$ قابلة للقلب في $F[x] \iff \deg f(x) = 0$

البرهان $\Leftarrow$ لدينا فرضاً $0 \neq f(x) \in F[x]$ قابلة للقلب في $F[x]$، وبما أن F حقل $\Leftarrow F$ ساحة صحيحة عندئذ حسب مبرهنة 1 نجد أن $\deg f(x) = 0$

$\Rightarrow$ لدينا فرضاً $\deg f(x) = 0 \Leftarrow 0 \neq f(x) \in F \subset F[x]$ ولما كان F حقلاً فإن العنصر a قابلاً للقلب في F وبالتالي a قابل للقلب في $F[x]$.

سندرس الآن كثيرات الحدود فيما إذا كانت مختزلة أم لا في $F[x]$ حيث F حقل

1- ندرس في هذه البرهنة وضع كثيرات الحدود ذات الدرجة صفر في $F[x]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

برهنة F حقل، كل كثيرة حدود في $F[x]$ درجتها تساوي الصفر هي كثيرة حدود مختزلة في $F[x]$

البرهان لتكن $f(x) \in F[x]$ بحيث $\deg f(x) = 0$ عندئذ حسب البرهنة السابقة تكون $f(x)$ قابلة للقلب في $F[x]$ وبالتالي $f(x)$ مختزلة في $F[x]$.

2- ندرس في هذه البرهنة وضع كثيرات الحدود ذات الدرجة واحد في $F[x]$

برهنة كل كثيرة حدود في $F[x]$ درجتها تساوي الواحد هي كثيرة حدود لامختزلة في $F[x]$

البرهان لتكن $f(x) \in F[x]$ و $\deg f(x) = 1$

ولنثبت أن $f(x)$ لامختزلة في $F[x]$

+ نلاحظ بأن $f(x)$ غير قابلة للقلب في $F[x]$ وذلك من كون $\deg f(x) = 1 > 0$

+ ليكن $f(x) = g(x)\,h(x)$ حيث $g(x) \in F[x]$ ، $h(x) \in F[x]$ بما أن $F[x]$ سامة صحيحة عندئذ:

$$1 = \deg g(x) + \deg h(x)$$

① $\deg g(x) = 0$ & $\deg h(x) = 1$

بالتالي $g(x)$ قابلة للقلب في $F[x]$

② $\deg g(x) = 1$ & $\deg h(x) = 0$

بالتالي $h(x)$ قابلة للقلب في $F[x]$

لقد برهنا أنه إذا كتبت $f(x)$ على شكل جداء كثيرتي حدود فأحدهما قابل للقلب، سنتج مما سبق أن $f(x)$ لامختزلة في $F[x]$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: إذا كانت $f(x) \in F[x]$ حيث F حقل و $n = \deg f(x) > 1$ واستطعنا من كتابة $f(x)$ بالشكل التالي: $f(x) = g(x)\,h(x)$ حيث

$$0 < \deg g(x) < n$$
$$0 < \deg h(x) < n$$

عندئذ نقول بأن $f(x)$ كثيرة حدود مختزلة في $F[x]$ وخلاف ذلك تكون $f(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة.

ملاحظة: إذا كانت $f(x) = g(x)\,h(x)$ لا مختزلة في الحلقة $F[x]$ عندئذ: $\deg g(x) = 0$ أو $\deg h(x) = 0$

مثال: أثبت أن $f(x) = x^2 - 2$ لا مختزلة في $Q[x]$.

الحل: نفرض جدلاً أن $f(x)$ مختزلة في $Q[x]$

$$f(x) = (ax+b)(cx+d) \quad ; \quad a,b,c,d \in Q$$
$$x^2 - 2 = ac\,x^2 + (ad+bc)\,x + bd$$

بالمطابقة $ac = 1$, $ad + bc = 0$, $bd = -2$

$$acd + bc^2 = 0 \Rightarrow d + bc^2 = 0 \Rightarrow bd + b^2c^2 = 0 \Rightarrow$$
$$-2 + (bc)^2 = 0 \Rightarrow (bc)^2 = 2 \Rightarrow |bc| = \sqrt{2}$$

$\sqrt{2}$ عدد عادي وهذا مرفوض

بالتالي الفرض الجدلي خاطئ و $f(x)$ لا مختزلة في $Q[x]$ حيث Q مجموعة الأعداد الكسرية.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z