كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : الاولى/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المتتالية: عندما نقول لكل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ عدد حقيقي هو u_n يوصل على متتالية.

حيث أن: $1, 2, 3, \dots, n \in \mathbb{N}$

$1 \longrightarrow u_1$

$2 \longrightarrow u_2$

$3 \longrightarrow u_3$

$u_1, u_2, u_3, \dots u_n \in \mathbb{R}$

$n \longrightarrow u_n$

الحد ذو الدليل n : u_n

هو دليل المتتالية

المتتالية الحسابية: كل متتالية الحد منها ناتج عن الحد الذي قبله بإضافة عدد حقيقي ثابت أسمه المتتالية الحسابية ورمزه بالرمز r

* العلاقة المتراجعية: $u_{n+1} = u_n + r$

* الحد العام: $u_n = u_0 + nr$

$= u_1 + (n-1)r$

* مبرهنة حساب مجموع متتالية حسابية:

$S = \frac{n}{2}(a+b)$

n: عدد الحدود = دليل الأخير − دليل الأول + 1

a: قيمة أول حد في المجموع

b: قيمة آخر حد في المجموع

* لإثبات أن U_n حسابية:

من العلاقة: (r عدد ثابت لا يحوي n) $U_{n+1} - U_n = r$

مثال:

$U_n = 3n + 1$

أثبت أن المتتالية (U_n) متتالية حسابية ثم أوجد أحد حدودها واحسب قيمة المجموع S

$S = U_5 + \dots\dots\dots + U_{20}$

الحل:

$U_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 4$

$U_{n+1} - U_n = 3n + 4 - 3n - 1 = 3 = r$

$\Rightarrow U_n$ متتالية حسابية أحد حدودها 3 و $r = 3$

قيمة المجموع S

$S = \frac{n}{2}(a + l)$

$n = 20 - 5 + 1 = 15 + 1 = 16$

$a = U_5 = 3(5) + 1 = 16$

$l = U_{20} = 3(20) + 1 = 61$

$S = \frac{16}{2}(16 + 61) = 8(77) = 616$

المتتالية الهندسية: نقول عن U_n أنها متتالية هندسية إذا كان كل حد منها ناتج عن الحد الذي يسبقه بضربه بعدد حقيقي ثابت يسمى أساس المتتالية الهندسية ويرمز له q

* العلاقة التدريجية: $U_{n+1} = U_n \cdot q$

* الحد العام: $U_n = U_0 \cdot q^n = U_1 \cdot q^{n-1}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* قانون حساب مجموع المتتالية الهندسية :

$$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

a : أول حد من المجموع

n : دليل عدد الحدود

q : أساس المتتالية الهندسية

* لإثبات أن u_n متتالية هندسية :

من العلاقة : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ (عدد ثابت)

مثال :

$$u_n = 2^n$$

أثبت أن (u_n) متتالية هندسية واحسب أحد حدودها الأول واحسب قيمة المجموع S

$$S = u_3 + \dots\dots + u_{2n}$$

الحل :

$$u_{n+1} = 2^{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \times 2^1}{2^n} = 2 = q$$

$$u_1 = 2^1 = 2$$

u_n متتالية هندسية أساسها $q = 2$

قيمة المجموع S

$$S = u_3 + \dots\dots + u_{2n}$$

$$n = 2n - 3 + 1 = 2n - 2$$

$$a = u_3 = 2^3 = 8$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$S = 8 \cdot \frac{1 - 2^{2n-2}}{1-2} = -8(1 - 2^{2n-2})$$

إطراد المتتاليات :

1. نقول عن المتتالية (u_n) أنها متتالية متزايدة تماماً إذا كان :

$(u_{n+1}) > u_n$

ومتزايدة إذا كان :

$(u_{n+1}) \geq u_n$

إشارة مهما يكن $\forall n \in \mathbb{N}$

2. نقول عن المتتالية (u_n) أنها متتالية متناقصة تماماً إذا كان :

$(u_{n+1}) < u_n$

ومتناقصة إذا كان :

$(u_{n+1}) \leq u_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$

3. نقول عن u_n أنها متتالية ثابتة إذا كان :

$u_{n+1} = u_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$

مثال: أثبت إطراد المتتاليتين

(1) $u_n = \frac{u_{n+1}}{n-2}$ (2) $u_n = \frac{3^n}{2^n}$

الحل:

(1) $u_{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1-2} = \frac{n+2}{n-1}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n-1} - \frac{n+1}{n-2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \frac{(n+2)(n-2) - (n+1)(n-1)}{(n-1)(n-2)}$$

$$= \frac{n^2-4-(n^2-1)}{(n-1)(n-2)} = \frac{-3}{(n-1)(n-2)} < 0$$

$n \geq 3$

المتتالية متناقصة بدءاً من الحد الثالث

n	0	1	2	$+\infty$
$n-1$	$-$	-0	$+$	$+$
$n-2$	$-$	$-$	$0+$	$+$
إشارة البداء	$+$	$0-$	$0+$	

(2) $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1} \times 2^n}{2^{n+1} \times 3^n} = \frac{3}{2} > 1$$

المتتالية متزايدة تماماً

ملاحظات:

1. يمكن تمثيل المتتالية العددية بنقاط على المحور الحقيقي وعليه إذا كانت المتتالية u_n محدودة أي تحقق الشرط:

$|u_n| < k$

فإن جميع حدود المتتالية تقع في المجال:

$]-k, k[$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2. إذا تغيرت حدود المتتالية نحصل على متتالية جديدة

$U_{n_1} = 2, 4, 6, \dots, 2n, 2n+2$

$U_{n_2} = 4, 2, 8, 6, \dots, 2n+2, 2n$

المتتاليات المحدودة من الأدنى:

نقول عن المتتالية U_n أنها متتالية محدودة من الأدنى إذا وجد عدد حقيقي $m \in \mathbb{R}$ يحقق $m \leq U_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$

المتتاليات المحدودة من الأعلى:

نقول عن المتتالية U_n أنها متتالية محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي $M \in \mathbb{R}$ يحقق $M \geq U_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$

المتتالية المحدودة: (محدودة من الأعلى ومن الأدنى معاً)

$$-k \leq x \leq k$$

$$|x| \leq k$$

نقول عن U_n أنها متتالية محدودة إذا كان:

$|U_n| \leq k \quad , \quad k \in \mathbb{R}_+^*$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$

مثال ①:

$(U_n = n)_{n \geq 1}$

$U_n = n \geq 1$

$\Rightarrow U_n$ محدودة من الأدنى بـ 1

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال (2):

$(u_n = 5 - n)_{n \geq 1}$

متتالية محدودة من الأعلى بـ 5

مثال (3):

$u_n (-1)^n$

$-1 < u_n < 1$

$|u_n| < 1$

المتتالية الجزئية:

بفرض لدينا متتالية u_n ولكن لدينا متتالية متزايدة من الأعداد الطبيعية $\{n_k\}$ عندئذ ندعو المتتالية $\{u_{n_k}\}$ متتالية جزئية من u_n

ملاحظة:

كل متتالية هي متتالية جزئية من نفسها إضافة في كل متتالية متتالية جزئية

مثال:

$\left(u_n = \frac{1}{2n+1}\right)$

هي متتالية جزئية من $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$

لأن

$\left(\frac{1}{2n+1}\right) < \frac{1}{n}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة