كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : احتمالات واحصاء

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z




يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

Date : / / Subject : الفضاء الاحتمالي

★ بعض المفاهيم الأساسية :

1- فضاء العينة : هو مجموعة نتائج التجربة ونرمز لها ($\Omega$)

2- الأحداث : هو ما نمثل وقوعه كل حدث له صفة معينة نحن نواصفه

هي مجموعات جزئية من فضاء العينة وتتصف بصفات معينة حسب الطلب ونرمز لها بالأحرف الكبيرة $(A, B, C, \dots)$

3- تابع الاحتمال : هو تابع نرمز له $p$ ينطلق مجموعة أحداث التجربة $p(\Omega)$ مجموعة أجزاء المجموعة $\Omega$

$$p : \Omega \longrightarrow (0,1)$$

ويحقق الشروط التالية :

1- $0 \leq p(A) \leq 1$ أيّاً كان $A$ من $\Omega$

2- $p(\Omega) = 1$ دوماً

3- إذا كان $A$ و $B$ فيطلين (متنافيين) أي أن $A \cap B = \emptyset$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

مثال : لتكن مجموعة نتائج تجربة ما $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

ما هي مجموعة أحداث التجربة:

$p(\Omega) = \{$ أحداث أولية (ابتدائية) $\{1\}\ \{2\}\ \{3\}\ \{4\}$

أحداث ثنائية $\{1,2\}\ \{1,3\}\ \{1,4\}\ \{2,3\}\ \{2,4\}\ \{3,4\}$

أحداث ثلاثية $\{1,2,3\}\ \{1,2,4\}\ \{2,3,4\}\ \{1,3,4\}$

الحدث الأكيد $\Omega$ $\{1, 2, 3, 4\}$

مجموعة خالية الحدث المستحيل $\emptyset$ $\}$

احتمالهم $\emptyset$

منطبقة $\{2,3\}\ \{1,4\}\ \{3\}\ \{2,4\}$

غير منطبقة $\{1,2,4\}\ \{2,4\}$

احتمال $= \{2,4\}$

$p(\emptyset) = 0$ NOTE: ☺

$p(\Omega) = 1$ ☺ ☺

أحداث منطبقة :

$A = \{1,2\}$ $B = \{3,4\}$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \emptyset$

2- $C = \{1,3\}$ $d = \{2,4\}$

$p(C \cap B) = \emptyset$

$p(C \cup B) = \Omega$ نحوهما متعاكسين أو متتامين

مكتبة A to Z

* احتمال الحدث: هو مجموع احتمالات وقوع عناصره

في تجربة السابقة $p(\{1,2,3\}) = p(1) + p(2) + p(3) = \frac{3}{4}$

* اذا كان احتمالات الأحداث الأولية متساوية نحو الفضاء فضاء متساوي الاحتمال

يكون احتمال الحدث $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ ← عدد عناصره A ، ← عدد عناصر $\Omega$

* أما اذا كان احتمالات الأحداث غير متساوية فيجب أن نعطي احتمالات أحداث الأولية في نص المسألة

* بعض قواعد الاحتمال: احتمال امتناع

1. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ← الأحداث منفصلة

2. بشكل عام ليس بالضرورة

3. حدث متمم $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

مثال تدريبي: لدينا صندوق يحوي 20 منديل منها 10 من القطن 6 من الصوف و 4 حرير

(A) (B)

نسحب منديل عشوائياً:

1. ما احتمال أن يكون المنديل من حرير أو من الصوف

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{4}{20} + \frac{6}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

2. ما احتمال أن يكون منديل ليس من حرير

$$p(\bar{A}) = 1 - \frac{4}{20} = \frac{16}{20}$$

مثال (2): لدينا مجموعتين من ورق اللعب الشدة:

1. نسحب ورقة من كل مجموعة ما احتمال أن تكون الورقتين أكه كلب

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} - \frac{1}{52} \times \frac{1}{52} = \frac{103}{2704}$$

مكتبة A to Z

Date : / / Subject :

الاستقلال الاحتمالي: نقول عن الحدثين أنهما مستقلان احتمالياً إذا كان

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

الاحتمال الشرطي: هو احتمال B بشرط A $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

نظهر الاحتمال الشرطي في حال السحب دون إعادة على التالي

تمرين (3): سحب ورقتين من أوراق اللعب 52 : سحب معاً

1- ما احتمال أن تكون واحدة على الأقل دينارية: $\frac{\binom{12}{2} + \binom{12}{1}\binom{39}{1}}{\binom{52}{2}}$ واحدة دينارية

* ملاحظات:

- التجارب الاحتمالية: منها مسائل الرمي أي القاء قطع نقود أو حجارة ومنها مسائل السحب من صندوق ونميز ثلاث عمليات سحب:

$C_1^4 = 4$ توافيق

1- السحب معاً: وهو عملية تشكيل مجموعات جزئية من فضاء العينة

توافيق: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ترتيب $\frac{P_r^n}{r!}$

2- سحب على التالي دون إعادة: (لدينا مجموعات تشكل ثنائيات مرتبة)

$\{1,2,3,4\}$ سحب دون إعادة

$P_2^4 = 4 \times 3 = 12$

(4,1) (1,2) (2,1) (3,1)
(4,2) (1,3) (2,3) (3,2)
(4,3) (1,4) (2,4) (3,4)

ترتيب $P_r^n = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

كذلك عند سحب ثلاث أشياء يكون عدد النتائج $P_3^4 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

3- سحب على التالي وبالإعادة: نفس النتائج ويكن بضاف (1,1) (2,2) (3,3)

في حال السحب يكون عدد النتائج $n \times n$ أو $n^2$

المثال السابق عدد النتائج $4 \times 4 = 16$

مكتبة A to Z

Date : / /  Subject :

$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ يكون السحب ثلاث عناصر من المجموعة السابقة

بالنسبة للتجارب العشوائية: رمي قطعة النقود مرتين يحصل على مجموع ثنائيات مرتبة وهي على الشكل

$(H,H)\ (H,T)\ (T,H)\ (T,T)$

$2^2 = 4$ سحب على التالي مع إعادة مرتين

$2^3 = 8$ ثلاث مرات

حالات:

$P(A) = \frac{3}{8}$ احتمال الحصول على شعارين فقط

$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ " " " شعارين على الأقل

$P(C) = \frac{1}{8}$ " " " على عدم الحصول شعار

مثال (2): عند رمي قطعة نقود 5 مرات، احتمال الحصول على 3 شعارات

الحل

قانون التجارب العشوائية

$\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}$

عدد مرات الشعار — عدد الشعار — عدد مرات

★ بعض قواعد العد:

1- قاعدة التباديل: وهو عملية السحب على التالي دون إعادة من انتقاء الكرات من الصندوق

لدينا الصندوق يحوي 5 كرات نسحب منه على التالي دون إعادة من انتقاء الكرات من الصندوق فيكون عدد الطرق: $5!$ أو $\binom{5}{5}$ وهو $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

★ لدينا مجموعة $(A,B,C)$ عدد تباديل المجموعة وعامل هذه التباديل

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

مكتبة A to Z

Date : / /  Subject :

* لدينا 8 كرات (3 حمراء، 2 سوداء، 3 بيضاء) ما عدد تباديل المتوفقة:

$$\frac{8!}{3! \times 2! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} =$$

ملاحظة:

إن عدد مبادلات $n$ من الأشياء التي تضم $n_1$ شيئاً متماثلاً و $n_2$ شيئاً متماثلاً ... هما القانون التالي:

$$= \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \dots}$$

* ما عدد تبديلات الأحرف statistiques

$$\frac{12!}{3! \times 1! \times 3! \times 2!}$$

NOTE:

* عدد المجموعات التي يتم بها فيها تقسم $n$ إن عدد من مجموعات تحوي كلها $n_1$ عنصراً $n_2$ عنصراً ... بحيث مجموع $n_1 + n_2 + \dots$ هو $n$ يعطى بالقانون:

هي نفسها طريقة تجميع

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ n_3} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!}$$

تعميم نظري:

نظرية الاحتمالات الشاملة: نفرض لدينا مجموعات جزئية من $\Omega$ بحيث تشكل تجزئة لها:

أي أن: $n \in E_n \dots E_3\ E_2\ E_1$

$$(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \Omega$$

$$E_i \cap E_j = \phi \quad i \neq j$$

أن كل مجموعتين مختلفتين تجزئة لبعضهما الصفة

مثال: لدينا $\{1, 2, 3, 4\}$

① تجزئة $\begin{cases} E_1 = \{1, 2\} \\ E_2 = \{3\} \quad E_3 = \{4\} \end{cases}$

② $\begin{cases} E_1 = \{1, 3\} \\ E_2 = \{2, 4\} \end{cases}$

مكتبة A to Z

Date : / /

Subject :

- بفرض أن B حدث يقع هذه الأحداث عندئذ يكون

$$P(B) = P(E_1) \times P(B|A) + P(E_2) \times P(B|E_2)$$

لدينا ثلاثة صناديق: صندوق (1) $A_1$( 3B , 2R)

صندوق (2) $A_2$( 1B, 3R)

صندوق (3) $A_3$( 2B, 2R)

نحن بحاجة أحد الصناديق وسحب منه كرة سوداء: احتمال سوداء

$$P(B) = P(A_1) \times P(B/A_1) + P(A_2) \times P(B|A_2) + P(A_3) \times P(B|A_3).$$

(B) سوداء

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{4}$$

ويستورباين: اذا علمت ان B قد وقع ما احتمال أن يقع $E_1$.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1) \times P(B/A_1)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}}{\text{(نا.غ)}}$$

مثال: فريق كرة قدم يلعب 60٪ من مبارياته على ارضه ضد 40٪ على ارض الخصم

فاذا علمت أن احتمال فوزه على ارضه 70٪ واحتمال فوزه على ارض الخصم 40٪

احسب احتمال فوز الفريق في مباراة اقيمت عشوائياً

$$P(B) = P(A_1) \times P(B/A_1) + P(A_2) \times P(B/A_2)$$

$A_1$ يلعب على ارضه

$A_2$ يلعب على ارض الخصم

$$= \frac{60}{100} \times \frac{70}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{40}{100}$$

$$= 58\%$$

مكتبة A to Z

Date : / /  Subject :

اذا علمت أن الفريق ضرب بالعقال آن يكون لعب في مباراة علما أنه

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1).P(B/A_1)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{60}{100} \times \frac{70}{100}}{\frac{58}{100}} = \frac{42}{58}$$

* تعميم لاحتمالات الشاملة :

ليكن E تجربة ما وليكن $A_1, A_2, A_k$ مجموعة شاملة نسبة واحتمالات وقوعها $P_1, P_2, P_k$ فإذا كررنا التجربة n مرة وبفرض أن عدد مرات ظهور كل حدث $M_1, M_2, M_k$ عندئذ فإن احتمال ظهور هذه الأحداث وفق هذه المرات هو قانون الجداني

$$P(m_1, m_2, m_k) = \frac{n!}{m_1! \, m_2! \, m_k!} P_1^{m_1} \cdot P_2^{m_2} \cdot P_k^{m_k}$$

مثال :

في تجربة القاء مطع نرد لدينا الأحداث الآتية $A_1\{1,2\}$ $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ، $A_2\{3\}$ $P = \frac{1}{6}$ ، $A_3\{4,5,6\}$ $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

بفرض أننا كررنا التجربة 10 مرات المطلوب حساب احتمال أن يقع $A_1$ مرتين و $A_2$ مرات و $A_3$ 3 مرات

$$P_{10}(2,5,3) = \frac{10!}{2! \times 5! \times 3!} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^5 \times \left(\frac{3}{6}\right)^3$$

مثال : يتبع راعي ما هدف احتمال إصابة مركز الهدف $\frac{2}{10}$ واحتمال إصابة بقية الهدف $\frac{5}{10}$ احتمال خذ في 10 طلقات أحتمال إصابة مركز الهدف 4 مرات و 4 مرات بقية الهدف

$$P_{10}(4,4,2) = \frac{10!}{4! \times 4! \times 2!} \times \left(\frac{2}{10}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{3}{10}\right)^2$$

مركز الهدف $A_1 = \frac{2}{10}$

بقية الهدف $A_2 = \frac{5}{10}$

إما لم يصب أولا $A_3$ فقم $\frac{3}{10}$

مكتبة A to Z

Date : / /

Subject :

* ملاحظة: لو كان السحب دون إعادة يكون الاحتمال باستخدام التوافيق

مثال: صندوق يحوي 5B و 8W سحب عينة دون إعادة مجمها 4 احسب احتمال أن كرتين سوداء

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$$

مكتبة A to Z

مكتبة A to Z