



كلية العلوم

القسم : علم الحياة

السنة : الاولى

المادة : احصاء حيوي

المحاضرة : الاولى والثانية / نظري / د. نبيل

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z : Facebook Group

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

11

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مبادئ في الاحتمالات الإحصاء

Preliminaries in Probability and statistics

I -1- Algebra of events

لمحة تاريخية عن تطور علم الإحصاء :

- لقد تمَّ اكتشاف علم الإحصاء في بدايات القرن العشرين ، فهو يُعْتَبَر من العلوم الرياضيّة الحديثة.
- في القرن الرابع قبل الميلاد بدأ التفكير في مجال الاحتمالات والمنطق من العالم الإغريقي أرسطو الذي طوّر في بحثه إلى أن توصّل به إلى (جبر المنطق).
- لقد تميّز هذا النوع من الجبر بجمل منطقية لها روابط (أدوات ربط) مثالها الاقتضاب -يؤدي إلى - ينتمي - الاحتواء - النقيضة - التغطي....) التي بها تكوّنت أربع جمل منطقية رياضية مؤسسها أرسطو:

1- الجملة المنطقية الرياضية المباشرة.

2- الجملة المنطقية الرياضية النقيضة.

3- الجملة المنطقية الرياضية العكسية.

4- الجملة المنطقية الرياضية النقيضة العكسية.

- إلا أنّ هذه الجمل تعتمد على الإفصاح بنوعيه الصدق أو الكذب أي لا وجود للاحتمال مطلقاً (من الممكن - من المحتمل).

1. الجملة المنطقية الرياضية المباشرة:

أنا طالب في الجامعة الدولية الخاصة كليّة الصيدلة ، و لديّ مقرر الإحصاء الحيوي

-جملة منطقية مباشرة إفصاحها صادق.

2. الجملة المنطقية الرياضية النقيضة:

لديّ مقرر الإحصاء الحيوي إذا أنا طالب في الجامعة الدولية الخاصة كليّة الصيدلة هنا الجملة

شرطها لازم وكافي (كفاية ولزوم الشرط) هذا يعني أنّه من اللازم كون الجملة صحيحة بكلّ

الحالات ،ولكن في الجمل الرياضية ليس ذلك بالضرورة من الممكن كوني طالباً ولكن في

جامعة أخرى .

هنا نكون قد وقعنا في الشك أي أن الإفصاح لا صادق ولا كاذب من الممكن الاتناء لذلك تكون الجملة منطقية نقيضة إفصاحها كاذب. (لتحديد الإفصاح لا مجال للشك وإن وُجِدَ فهو كاذب).

3. الجملة المنطقية الرياضية العكسية:

لستُ طالباً في الجامعة الدّوليّة الخاصّة كلية الصيدلة ، وليس لديّ مقرر الإحصاء الحيوي هنا من الممكن كوني طالباً ولكن في كلّية أخرى.
جملة منطقية عكسية إفصاحها كاذب.

4. الجملة المنطقية الرياضية النقيضة العكسية:

ليس لديّ مقرر الإحصاء الحيوي إذا أنا لست طالباً في الجامعة الدّوليّة – كلّية الصيدلة.
جملة منطقية نقيضة عكسية إفصاحها صادق.

Note: يوجد تلازم في إفصاح كل من الجملتين المنطقيتين الأولى والرابعة أي ما بين المباشرة والنقيضة العكسية. وأيضاً هناك إفصاح متلازم في كل من الجملتين المنطقيتين الثانية والثالثة أي ما بين النقيضة والعكسية.

Info: باعتماد الشبكة المنطقية الممثلة بثنائية (0.1) حيث أنّ:

1 ← إفصاح صادق (✓).

0 ← إفصاح كاذب (X).

اعتُبر جبر المنطق بدايةً لكلّ العلوم المنطقية الجبرية الرياضية الذي من خلاله وُجِدَتْ الخوارزميات التي تدخل في علوم الحواسيب.

تفرّع المنطق إلى منطقتين أحدهما شكلي يُعنى في منطق الفلسفة والاقتصاد والسياسة (هذا الفرع من المنطق في تطور دائم) ، والآخر رياضيّ الذي كان قد مرّ في مرحلة كمون (سبات)، فهو لم يتطور أبداً حتّى القرن 18 (أي ما يُقارب 12 قرن من السّبات) إلى أن قام كلّ من العالم الانكليزي جورج بول ومجموعة من زملائه بتأسيس ما يُسمى (بجبر المجموعات ← Algebra ties) الذي طوّر إلى (الجبر البوليني المجرد) يُعنى ب { sin-cos-، زوايا، عمليات حسابية كال+/-/÷..... } .

جبر المجموعات {يُعنى بـ $\cup, \cap, \bar{\cdot}$...} هو عبارة عن جبر مختلف تماماً عن الجبر المجرد.

المجموعة: تُمثّل تَجَمُّع لعدة أشياء / عناصر من شكل ولون واحد.

قام العالم بوريل زميل العالم الانكليزي جورج بول بنقل جبر المعلومات إلى : الحوادث، فبدأ بتأسيس تسميات اختلفت مع التي كانت عليها في جبر المجموعات وتتناسب مع جبر الحوادث: (الاختلاف فقط في التسميات).

- متمم مجموعة $\leftarrow$ حدث مضادّ، وليكن $\bar{A}$
- مجموعة شاملة كليّة $\leftarrow$ حدث أكيد، E
- مجموعة خالية $\leftarrow$ حدث مستحيل، $\emptyset$
- اجتماع مجموعتين $\leftarrow$ اجتماع حدثين، وليكن $A \cup B$ أو $A \text{ or } B$
- تقاطع مجموعتين $\leftarrow$ تقاطع حدثين، وليكن $A \cap B$ أو $A \text{ and } B$ (resection)
- فرق مجموعتين $\leftarrow$ فرق حدثين، وليكن $\bar{A} \cap B$ أو $A \setminus B$

ما بين القرن 18 و 19 أسّس بوريل ما يسمّى بالتّابع الاحتمالي وهو حقل مستقرّه قيمة واقعة ضمن المجال $[0,1]$

في بدايات القرن 20 وعن طريق الصدفة تطوّرت ألعاب الخط والقمار أسّس علم الإحصاء الذي تفرّع إلى فروع عديدة منها : حيوي ووصفي ورياضي وطبيّ.

توضيح لبعض المفردات:

- لنفرض أنّ A و B مجموعتين في فضاء عشوائي X_i (Random space)
نقول عن (A أو B) أحداث (Events).
- ($A \cup B$ أو $A \text{ or } B$) اجتماع حدثين $\leftarrow$ هو جميع العناصر في كلتا المجموعتين.
- ($A \cap B$ أو $A \text{ and } B$) تقاطع حدثين $\leftarrow$ هو جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين.
- E/Ω الحدث الأكيد $\leftarrow$ هو فضاء العينة ذاته (مجموعة شاملة كليّة).
- $\emptyset$ الحدث المستحيل $\leftarrow$ هو المجموعة الخالية ذاتها.
- $\bar{A}$ الحدث المضادّ $\leftarrow$ هو المجموعة المتممة ذاتها.

$\bar{A}$ تعريفه: هو مجموعة العناصر الموجودة في الحدث الأكيد E وغير موجودة في الحدث A .

خواصّه: اجتماع كل من الحدثين $(\bar{A}, A)$ هو مجموعة شاملة وتقاطعهما هو مجموعة خالية

$$\underline{\text{EX1:}} \quad E:\{1,2\}$$

$$A:\{1\} \rightarrow \bar{A}:\{2\}$$

$$\text{EX2: } E:\{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow \text{فضاء عينة تجربة رمي حجر بنرد}$$

$$\begin{array}{ccc} A:\{1,3,5\} & \rightarrow & \bar{A}:\{2,4,6\} \\ \searrow & & \searrow \\ \text{ظهور الأعداد الفردية} & & \text{ظهور الأعداد الزوجية} \end{array}$$

1-2 خصائص جبر الحوادث: Properties of algebra events

تعميم: (إنّ الخصائص الآتية صحيحة مهما يكن (- أي يكن / من أجل)

$$A, B, C, E$$

$$1) A \cup B = B \cup A \quad \& \quad A \cap B = B \cap A$$

في جبر الحوادث كل من الاجتماع والتقاطع تبديلي.

$$2) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad \& \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

في جبر الحوادث كل من الاجتماع والتقاطع تجميعي.

$$3) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

في جبر الحوادث الاجتماع هو توزيع على التقاطع .

$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

في جبر الحوادث التقاطع هو توزيع على الاجتماع.

$$4) A \cup A = A \quad A \cap A = A$$

في جبر الحوادث (خاصة اللانمو)

$$5) A \cup (B \cap A) = A \quad \& \quad A \cap (\underline{B \cup A}) = A$$

$$6) A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap E = A$$

في جبر الحوادث دائماً عند التقاء U و $\cap$ (اجتماع و تقاطع) ربط مختلف لمجموعة ذاتها تقوم بامتصاص المختلفة (خاصة الامتصاص)

$$7) A \cup \bar{A} = E \quad \& \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$8) \bar{\bar{E}} = \emptyset \quad \& \quad \bar{\emptyset} = E$$

$$9) \bar{\bar{A}} = A \quad \& \quad \bar{\bar{\emptyset}} = \bar{A}$$

في جبر الحوادث مضاد مضاد الحدث (مضاد زوجي) هو الحدث ذاته .

ومضاد مضاد مضاد الحدث (مضاد فردي) هو مضاد الحدث ذاته.

$$10) \bar{B} \cup \bar{A} = \overline{A \cap B} \quad \& \quad \bar{B} \cap \bar{A} = \overline{A \cup B}$$

قانونا دومرغان

في جبر الحوادث مضاد اجتماع حدثين يساوي تقاطع المضادات. ومضاد تقاطع حدثين يساوي اجتماع المضادات.

EX: Die $E: \{1,2,3,4,5,6\}$

$A: \{1,3,5\}$

$B: \{2,4,6\}$

$$\begin{array}{lcl} L_1 = A \cup B = \bar{E} = \emptyset & \left. \begin{array}{l} A \cup B = \bar{A} \cap B \\ = \bar{A} \cup B \end{array} \right\} & L_1 = L_2 \\ L_2 = A \cap B = B \cap A = \emptyset & & L_1 = A \cap B = \emptyset = \\ L_1 = L_2 & & \\ & & L_2 = \bar{A} \cup B = B \cup A = E \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(Q)} : A \cup B = A \text{ or } B = \bar{A} \cap B \\ 10- A \subseteq B \left\{ \begin{array}{l} 1- A \cap B = A \\ 2- A \cup B = B \end{array} \right. \end{array}$$

احتواء مجموعة لأخرى يعني أن كل عنصر من المجموعة الأصغر المحتوى في الأكبر موجود في المجموعة الأكبر الحاوية للأصغر.

Note: $A \subseteq A$ حسب التعريف صحيحة (كل مجموعة هي مجموعة جزئية في نفسها).

التركيز على هذه الخاصية في بحث حقل بوريل.



نتائج:

1 - نتيجة أولى: في جبر الحوادث هو نفسه جبر المجموعات (جبر بول) الاختلاف فقط في التسميات.

2 - نتيجة ثانية: العنصر الحيادي بالنسبة للتقاطع هو الحدث الأكيد والعنصر الحيادي بالنسبة للاجتماع هو الحدث المستحيل.

بغض النظر : (...../÷/×/-/+) ($e * a = a = a * e$) هنا العنصر الحيادي e لا يؤثر على a

تعريف العنصر الحيادي e : عند تشكيله مع أي عنصر آخر يعطي ذاته ولا يؤثر على العملية سواء أكان من اليسار أو اليمين.

Info: العنصر الحيادي لعملية الزائد الصفر

العنصر الحيادي لعملية الضرب الواحد

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cup \emptyset = A \\ A \cap E = A \end{array} \right\} \downarrow e$$

لنفرض لدينا فضاء عينة $E(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$

حيث n تمثل عدد عناصر فضاء العينة

لنأخذ تجزئة لهذا الفضاء $B(E) : \{A; A \subset E\} \leftarrow$

إن $B(E)$ تمثل مجموعة كل الحوادث A حيث A مجموعة جزئية من فضاء العينة E ، وهذه التجزئة لها شروط:

نقول عن هذه التجزئة أنها تمثل حقل بوريل إذا حققت الشروط الآتية:

$$\emptyset \subset B(E) \quad \& \quad E \subset B(E)$$

- كيف يمكن لتجزئة أن تحوي فضاء عينة ؟
- من الممكن كون أحد المجموعة الجزئية من التجزئة $B(E)$
 $EX: Die \ E: (1,2,3,4,5,6)$
 $B(E): [\{1\}, \{1,2\}, \dots, \{1,2,3,4,5,6\}]$

Note: عدد المجموعات الجزئية المحتمل وجودها في $B(E)$ هو 36

نلاحظ أن آخر تجزئة هي ذاتها فضاء العينة ، فنقول (فضاء جزئي في تجزئة)، نستنتج

أن التجزئة أكبر من الفضاء ذاته من حيث الحجم.

خلاصة: كل مجموعة هي جزئية في ذاتها ، فطالما فضاء العينة E هو مجموعة ظهور أعداد النرد من 1 $\leftarrow$ 6 هذا يعني الفضاء جزئي في ذاته .

$$2) \forall A_i \subset B(E) , \quad \cup A_i \subset B(E) \quad \&$$

$$\cap A_i \subset B(E)$$

أيّا تكن عدة حوادث من التجزئة $B(E)$ يؤدي أن اجتماع هذه الحوادث هو $B(E)$ وتقاطعهما من $B(E)$ أيضاً.

Info: عملية الجمع هي عملية داخلية مغلقة بالنسبة إلى الأعداد الطبيعية أما الطرح فلا ، فالطرح

$$3) \forall A_i \subset B(E)$$

$$\bar{A}_i \subset B(E)$$

أيّا يكن A_i من التجزئة $B(E)$ هذا يعني أن $\bar{A}_i$ هو من $B(E)$ أيضاً. نقول عندما هذه الشروط محققة يعني أن هذه التجزئة تمثل حقل بوريل. لنأخذ تطبيق ما (L) مُعرّف على النحو التالي:

$$L: B(E) \rightarrow [0,1]$$

منطلقه تجزئة حقل بوريل

مستقره مجموعة القيم ضمن هذا المجال

يمكن كتابة هذا التطبيق على شكل احتمال P (Probability):

$$P(A): B(E) \rightarrow [0,1]$$

ويُقرأ : احتمال أي تجزئة أو حادثة مستقرّها قيم المجال $[0,1]$.

نقول عن هذا التطبيق أنه تابع احتمالي إذا حقق الشروط الآتية :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

أي تابع احتمالي قيم مستقره هو مجموعة الأعداد الواقعة ضمن المجال $[0,1]$.

$$P(\cup A_i) = \sum P(A_i) \quad \text{قانون الجمع الاحتمالي بصورته المختصرة}$$

هو احتمال اجتماع عدة حوادث يساوي مجموع هذه الاحتمالات.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$$

الاحتمالي بصورته العامة.

$$P(E) = 1$$

$$\& P(\emptyset) = 0$$

احتمال أي فضاء

احتمال مجموعة خالية = 0

عينة = 1

هام Q: حدد ماهي شروط كل من التابع الاحتمالي وحقل بوريل؟

Conclusion for A or B

The two events A and B in a random space E, we notice this next points:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

لا يمكن أن يكون للتابع الاحتمالي أي قيم سالبة لأن مستقره مجموعة القيم ضمن المجال

2) $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$

دائماً الاحتمال لا يُعامل معاملة المجموعات والحوادث ، فلا نكتب $[P(A) \subseteq P(B)]$

لأن الاحتواء من خواص جبر المجموعات أما الاحتمال فإما أكبر أو أصغر أو يساوي.

3) $A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

متى نقول عن عدة حوادث لها خاصية أنها مستقلة أي ليس لها ارتباط بحوادث أخرى؟

نقول عن حدثين أنهما مستقلين عندما تقاطعهما هو الحدث المستحيل بمعنى أن A غير مشروط مع B وبالعكس.

4) $A \cap B \neq \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

قانون الاحتمال الشرطي : نقول احتمال A علماً أن B قد وقع هو احتمال التقاطع على احتمال الحدث B.

من الخاصة 5 نجد الخواص الآتية:

a) $A \subseteq B \implies P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)}$

b) $B \subseteq A \implies P_B(A) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

c) $P(A \cap B) = P_B(A) \cdot P(A)$

$$P_{B,C}(A) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P_{B,C}(A) \cdot P(B \cap C)$$

التقاطع تبديلي

من العلاقة C نجد: $P(A \cap B \cap C) = P_C(B) \cdot P(C) \cdot P_{B,C}(A)$

المفترض أن وقوع هذه الحوادث وليكن A غير مشروطاً بوقوع الحوادث أخرى

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

ويسمى بقانون الضرب الاحتمالي الذي يمكن كتابته بصورة مختصرة على الشكل

$$P(\cap A_i) = \prod P(A_i)$$

هو احتمال تقاطع عدة حوادث يساوي جداء هذه الاحتمالات وأيضاً يمكن كتابته بصورة عامة على الشكل:

$$P(A \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

$$6) P(A \cup \bar{A}) = P(E) = 1$$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \longrightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$\underline{\text{Or}} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

إذا رمزنا لنجاح التجربة / الحادثة بـ P ولفشلها بـ q عندئذ:

$$P = 1 - q \quad \underline{\text{Or}} \quad q = 1 - P$$

$$7) P(A \setminus B) = P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ويسمى بقانون الفرق التناظري.

Info 1: ماهي أصغر مجموعة من المجموعات العددية؟

1- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ هي المجموعة الأصغر $[1, 2, 3, \dots, +\infty]$ وتُعرف بأنها كل

عدد يزيد عن الذي يليه بـ 1 وهي مجموعة الأعداد الموضوع ضمنها الصفر ، فهو يحقق

$$\text{العلاقة السابقة} \quad -0 + 1 = 1$$

2- تليها مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ وهي مجموعة الأعداد الموجبة والسالبة بالصفر

$$[-\infty, 0] \cup [0, +\infty]$$

3- تليها مجموعة الأعداد العادية $\mathbb{Q}$ التي تقسم على قسمين :

مجموعة الأعداد العادية ومجموعة الأعداد غير العادية

مجموعة الأعداد العادية -Q- وهي مجموعة الأعداد العشرية (قسمة عدد صحيح على عدد صحيح باستثناء إشكاليات الصفر).

حالات خاصة: يكون العدد عادياً إذا كان عشرياً والعدد ما بعد الفاصلة مكرر وغير منتهي مثاله :

-1,6- ومن الممكن أن يكون التكرار بتراتبية معينة ليس عدد واحد بعد الفاصلة فمن الممكن تكرار عددين فما فيجب الانتباه جيداً ومثاله -3,347347-

يكون العدد عادياً إذا كان عشرياً والأعداد ما بعد منتهية ومثاله : $1,5 = \frac{3}{2}$ - (غير مكررة)

هل يكون العدد عادياً إذا كان عشرياً والأعداد ما بعد الفاصلة مكررة ومنتهية ؟ صح **مجموعة الأعداد غير العادية -Q-** وهي مجموعة الأعداد العشرية أيضاً ولكن نميزها عن مجموعة الأعداد العادية -Q- بحالاتها الخاصة ، ونلفت النظر إلى أعدادها القليلة.

حالات خاصة: يكون العدد غير عادياً إذا كان عشرياً والأعداد ما بعد الفاصلة غير مكررة وغير منتهية ومثاله : $3,14\sqrt{2} = \frac{22}{7}$

Info -Sin41- مازال في إشكالية إلى الآن حول قيمته و فلم يحدد ما إذا كان عدداً عادياً أو غير عادياً.

مجموعة الأعداد الحقيقية -IR- هي اجتماع الأعداد العادية وغير العادية -IR=QUQ-

مجموعة الأعداد العقدية -ℂ- من الشكل العام $ℂ = a + ib$

حيث $i^2 = -1$ وتعتبر هذه المجموعة أكبر المجموعات العددية وأشملها.

الأعداد المركبة كتسمية رياضياً أصح من الأعداد العقدية complex - فكلما complex كلمة علمية طبية أكثر مما هي رياضية .

العدد-1- هو عدد حقيقي وعادي وغير عادي وصحيح وطبيعي ومركب و فهو يحقق الشكل العام للأعداد المركبة : $-1 = 1 + 0i$

Conclusion: كل عدد هو مركب ، فهي المجموعة الأكبر والأشمل لكل المجموعات.

Info2: $a^3 = a \times a \times a$

$a^2 = a \times a$

$a^1 = a$

اصطلاح : أي عدد أسه صفر يساوي الواحد. (Why?) $a^0=1$

$$A^0 = a^{b-b=0} = a^b \cdot a^{-b} = \frac{a}{a} = 1$$

حيث $\frac{a}{a} = 1$ لأن القسمة على صفر غير ممكنة $a \neq 0$

في حالات عدم التعيين : $\frac{0}{0}$ لا تساوي الواحد، لا تحقق 1

$$0^0 = 0^{b-b} = 0^{b-b} \cdot 0 = \frac{0}{0} = \frac{0}{0} \quad (Why?)$$

حالة عدم تعيين



$$1/\infty = 0 \quad \text{لكن}$$

:Info3

$$3! = 3 \times 2 \times 1.$$

$$2! = 2 \times 1.$$

$$1! = 1.$$

$$0! = 1.$$

$$n! = n(n-1) \dots 3 \times 2 \times 1.$$

:Info4

$$\sum^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\sum^3 a = a + a + a = 3a$$

هنا لا يوجد دليل أو نلاحظ أنه لا يؤثر على العنصر a

$$:\pi^3 a_i = a_1 \times a_2 \times a_3$$

$$\pi^3 a = a \times a \times a = a^3$$

II- التكرار والتكرار النسبي

II-1 الترتيب والتوافق

Frequency and relative frequency

Orders and combinations.

1- لنختار (m) من (n) عنصر بشكل مرتب ، يكون عندئذ قانون الترتيب على النحو التالي:

$$P(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

لا يعتمد قانون الترتيب على هذا الشكل لأنه من الممكن أن يأخذ شكل آخر عند نيوتن ، لذلك

لتفادي اختلاط الأفكار نعتد الشكل التالي $P^n m$

ويمكن أن نكتب قانون الترتيب على نحو آخر:

$$P(n,m) = n (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-m+1)$$

ليكن قانون الترتيب:

$$P(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

إذا كان عدد الاختيارات يساوي عدد العناصر (المجموعة بكاملها مختارة) -n=m- عندئذ:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3).....3 \times 2 \times 1$$

$$O! = 1/ \rightarrow P(n, m) = \frac{n!}{o!} = n!$$

Info: العامل هو نوع من أنواع الدوال المتسامية وليس الجبرية ، فلا يمكن إجراء عليها العمليات الحسابية الجبرية أي لا تكون محققة ، وكذلك دوال اللوغاريم، و $\cos, \sin$ تُعتبر من الدول المتسامية فقط عملية الاختصار محققة لا أكثر (الضرب والقسمة والجمع والطرح) مثلاً: $3! \times 2! \times \frac{6!}{3!}$

في حالة اختيار (m) من (n) عنصر بشكل عشوائي ، يكون عندئذ قانون التوافق على النحو التالي:

$$C(n, m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Note: في أي حالة يكون عدد الاختيارات أكثر الترتيب أم التوافق ؟

الترتيب عدد اختياراتها أكثر من التوافق لأن في الترتيب هناك ما يُدعى بالتبادل لأن الترتيب مهم أما في التوافق بما أن الاختيار عشوائي فالترتيب غير مهم وبالتالي لا تبادل التي من عدد الاختيارات.

كذلك يمكن تفسير ذلك رياضياً حسب القوانين لكل من الترتيب والتوافق:

$$C(n, m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad P(n, m) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

المقام أكبر من مقام الترتيب وكلما كبر المقام صَغُرَ الكسر وبالتالي الترتيب يكون عدد اختياراتها أكثر.

هناك علاقة ما بين التوافق والترتيب:

$$C(n, m) = \frac{1}{m!} \cdot P(n, m)$$

II2- الترتيب عند التكرار

The orders at frequency.

مداخلة (أمثلة توضيحية):

لنفرض أنه قد تم رمي قطعة نقود 10 مرات وكان قد ظهر أحد الأوجه أيّاً كان 6مرات فيكون عدد مرات ظهور الوجه الآخر 4مرات.

نقول نسبة احتمال ظهور عدد الأوجه أيّاً كان - $\frac{6}{10}$ - فيكون احتمال ظهور الآخر - $\frac{4}{10}$ -

ومجموعهما هو احتمال فضاء العينة للتجربة ويساوي الواحد:

$$P(E) = \frac{6}{10} + \frac{4}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Note: نستنتج أن التكرار النسبي هو عبارة عن احتمال .

لنفرض أنه قد تم رمي قطعة النقود ذاتها عدد كبير جداً من المرات -n- مرة : n: عدد مرات الرمي.

فظهر أحد الأوجه أيّاً كان -m- مرة عندئذ يكون مرات ظهور الوجه الآخر هو -n-m- مرة-

نقول نسبة احتمال ظهور أحد الأوجه الذي كانت عدد مرات ظهوره -m- تمثل بالنسبة - $\frac{m}{n}$ -

والتي تعبر عن التكرار النسبي.

منطقياً ورياضياً يجب أن تسعى النسبة إلى الصفر لأن المقام -n- الذي يُمثل عدد مرات الرمي كبير جداً جداً فقيمة الكسر صغيرة جداً جداً تسعى إلى الصفر .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = \frac{m}{\infty} = \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

ولكن -m- في البسط عدد متغير ، فهذا قد يُحدث فرقاً نوعاً ما.

حالات خاصة: عدد مرات ظهور أحد الأوجه أيّاً كان $m=0$ نهاية النسبة:

$$\frac{m}{n} = \frac{0}{\infty} = 0 \rightarrow \infty$$

ولكن هذا ليس بواقعيّاً ، فمن غير الممكن حصول ذلك حتى أنه بعيد عن الواقع والمنطق. عدد مرات ظهور أحد الأوجه أيّاً كان -m- يساوي عدد مرات الرمي -m=n- فتكون نهاية النسبة:

$$\frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1 \rightarrow \infty$$

كذلك هذا ليس بواقعيّاً ، صحيح منطقياً ولكن من المستحيل حصوله في الواقع. فنصطلح: إذا كانت n أكبر بكثير - $n \gg \gg \gg$ - تكون نهاية النسبة تسعى إلى النص - $\frac{1}{2}$ -

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2} \text{ why?}$$

نقول أن n تسعى إلى $(\frac{1}{2})$ وذلك كقيمة وسطية أي لا للصفر $\frac{1}{2} \rightarrow n \gg \gg \gg$ ولا للواحد.

هذا يعني احتمال ظهور أحد الأوجه أيّاً كان هو - $\frac{1}{2}$ -

Note: نستنتج أن التكرار النسبي ما هو إلا احتمال من رمية واحدة.

قانون التكرار النسبي = $\frac{\text{عدد النواتج}}{\text{عدد مرات التجربة}}$

نفرض أن اختيارنا لـ m -عنصر من- n -عنصر لحادثة تحتوي على من العناصر المتشابهة، وتحتوي أيضاً على m_2 -من العناصر المتشابهة ، كذلك $m_3, m_4, \dots, m_r$ من العناصر المتشابهة

في هذه الحالة يكون قانون الترتيب عند التكرار أو التشابه على النحو الآتي:

$$P^n(m_1, m_2, m_3, \dots, m_r) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot m_3! \cdot \dots \cdot m_r!}$$

بفرض حالة عدم وجود تشابه وتكرار عندئذ يكون قانون الترتيب عند التكرار والتشابه على النحو الآتي:

$$P^n(1) = \frac{n!}{1} = n!$$

Example 1: How many words could be formed from the letters of the following words?

a) House

b) Book

c) Mississippi.

Solution: a) $P^5(1) = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$$\text{b) } P^4(2) = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

$$\text{c) } P^{10}(4, 3, 2) = \frac{10!}{4! \times 3! \times 2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 12600$$

Example 2: For $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ and for $P(A)$ function probability ,
for $P(a_2) = \frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{1}{6}$, $P(a_4) = \frac{1}{9}$ and $a_1 \cap a_2 = \emptyset$,Find $P(a_1 \cup a_2)$?

Solution: $P(a_1 \cup a_2) = P(a_1) + P(a_2) - P(a_1 \cap a_2)$ (*)

But we know:

$$P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + P(a_4) = 1$$

$$P(a_1) = 1 - [P(a_2) + P(a_3) + P(a_4)]$$

$$P(a_1) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{18-6-3-2}{18} = \frac{7}{18}$$

نعوض بـ * :

$$P(a_1 \cup a_2) = \frac{7}{18} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{7}{18} + \frac{6}{18} = \frac{13}{18}$$

Example 3: Student has to answer 10 from 13 questions :

a) In how many ways could we do that?

b) In how many ways could we do that if?

The first and second questions were obligatory?

c) In how many ways could we do that If he should answer 3 questions of the first five questions?

Solution: a) $C_{10}^{13} = C(13,10) = \frac{13!}{10!(13-10)!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10!}{10!(3!)} =$

$$\frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = 13 \times 2 \times 11 = 286.$$

b) $C_8^{11} = \frac{11!}{8!(11-8)!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8!(3!)} = 165.$

c) $C_3^5 \cdot C_7^8 = \frac{5!}{3!(5-3)!} \times \frac{8!}{7!(8-7)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!(2!)} \times \frac{8 \times 7!}{7!(1!)} = 10 \times 8 = 80$

Note: في التوافق إذا كانت $n=m$ يكون الناتج مساوياً للواحد . أما إذا كان الفرق ما

بينهما مساوياً للواحد يكون الناتج هو n :

وذلك لتسهيل العمليات الحسابية.

Example 4: for $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ and $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, Find

$P(B)$ and $P(A \cap B)$?

Solution: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B) = \frac{1}{3} - P(A \cap B) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

3-II المجتمع والعينة

1-3-II جدول التوزيع والتكرار

Population and sample.

Distribution table and frequency.

لنفترض أن الفضاء العشوائي لتجربة ما يُعطى بالشكل:

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

نميز حالتين / احتمالين إما أن تكون المشاهدات مباشرة التي لا يشترط فيها التكرار بشكل ملحوظ ممكن حالة أو حالتين أو أنها تمثل فئات الذي من المفترض فيها التكرار بشكل مؤكد ضمن المجالات.

• ما الفرق بين الحالتين؟

نلاحظ أنه في كلا الحالتين يرافق ذلك تكرار — Frequency

فيكون التكرار — F_i — يعطى بالشكل :

$$\{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n\}$$

لنأخذ التكرار في جدول ونسميه جدول التكرار -Frequency table-

x_i	x_1	x_2	x_3		x_n
F_i	F_1	F_2	F_3		F_n

لنأخذ تراكم التكرار في جدول ونسميه جدول التوزيع التكراري

Frequency distribution table—

x_i	x_1	x_2	x_3		x_n
F_i	F_1	F_2	F_3		F_n
F.D.t	H_1	H_2	H_3		H_n

((Vital statistics))

حيثُ:

$$*h_1 = F_1$$

$$*h_2 = F_1 + F_2 = h_1 + F_2$$

$$*h_3 = F_1 + F_2 + F_3 = h_2 + F_3$$

$$*h_n = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = h_{n-1} + F_n$$

مثال تطبيقي بسيط: لتوضيح أكثر للحالة نأخذ مثال لتوضيح البيانات ونمثلها بتمثيلات بيانية

معينة من أجل "s" عينة تم إجراء إحصائية لدرجات الطلاب في الثالث الثانوي في مادة

الرياضيات وكانت النتائج كالتالي:

Xi	Fi
[20-30[	5
[30-40[	10
[40-50[	4
[50-60[	2

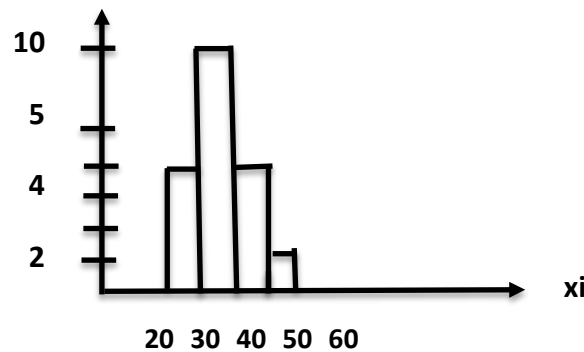
هذا المثال الكيفي يمثل فئات (نظام مجالات) وليس مشاهدات مباشرة فالتكرار واضح وهذه المعطيات تمثل جدول تكرار.

هناك تمثيلات بيانية إحصائية معينة تعمل على توضيح أكثر للعينة الإحصائية منها ما يسمى بمضلع التكرار وآخر بمنحني التوزيع .

1. مضلع التكرار: (Frequency Polygon)

هو عبارة عن تمثيل بياني يمثل مستطيلات قواعد ثابتة الطول وتساوي $(F_{i+1} - F_i)$ كما أنها متلاصقة ببعضها البعض وارتفاعاتها تمثل التكرار .

Note: في جدول التكرار عادة المشاهدات تمثل فئات (نظام مجالات) فيكون كل مجال على محور xx يرافقه قيمة معينة على ارتفاع (التكرار) الذي هو محور .



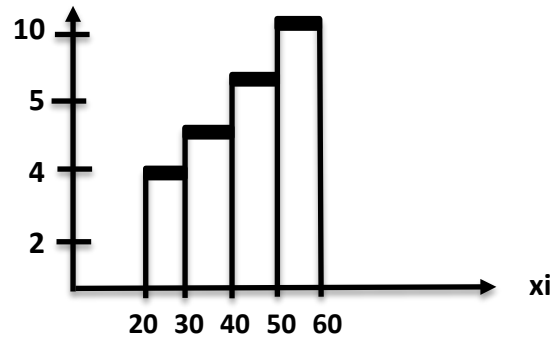
طريقة رسم مضلع التكرار:

نأخذ منتصف القاعدة العليا من كل مستطيل نصل بالمسطرة بين النقاط ، فنحصل على مضلع التكرار ، تسمح الشرائح المستطيلية الشكل عن طريق الحواسيب ويبقى المضلع كشكل بياني يمكن لنا من خلاله قراءة البيانات الإحصائية بصورة أوضح: أنها تعطي نظرة تحليلية إحصائية شاملة.

2. منحني التوزيع (Distribution curve):

هو عبارة عن تمثيل بياني يمثل مستطيلات متساوية البعد عن المحور الأفقي وتساوي $(F_{i+1} - F_i)$ كما أنها متلاصقة ببعضها البعض - كمضلع التكرار - وارتفاعاتها تمثل تراكم التكرار وليس التكرار.

hi



طريقة رسم منحنى التوزيع: نأخذ الزاوية المنحني العليا من كل مستطيل نصل بين النقاط باليد وذلك كي لا تضيق من الشرائح فنحصل على منحنى التوزيع:

Example: For S is a sample consists of 35 students and the age of each student written in the following table:

19	20	20	20	20	21	21
21	21	21	22	22	23	25
25	25	28	29	33	34	34
35	35	37	37	38	38	39
41	44	45	46	46	61	62

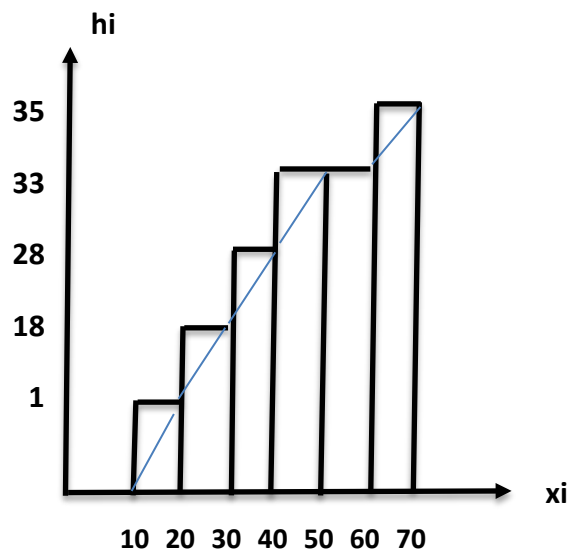
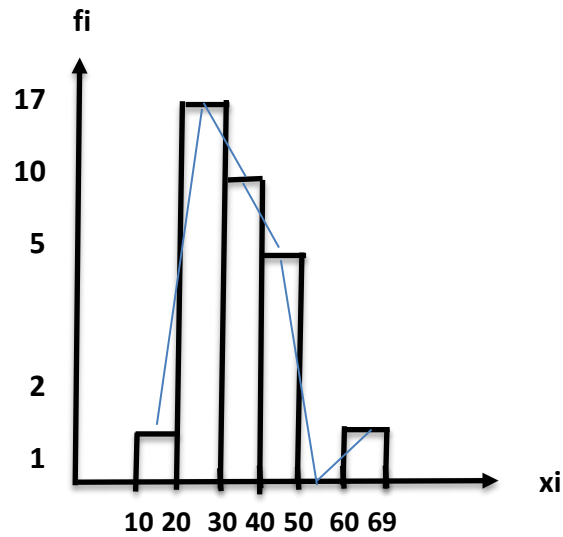
1.Put data in order in frequency table from 10 – 19 up to 60 – 69 and find frequency distribution table

2.Find frequency pdygon and distribution curve

Solution:

Xi	(10 , 20)	(20 , 30)	(30 , 40)	(40 , 50)	(50 , 60)	(60 , 70)
Fi	1	17	10	5	0	2
Hi	1	17	28	33	33	3

مضلع التكرار:



لتحديد طول الفئة نختار علاقة ستورجز sturges

$$C = \frac{(M - m)}{1 + 3.322 \cdot \log(n)}$$

M أكبر مفردة في البيان الاحصائي

m أصغر مفردة في البيان الاحصائي

ويمكن استخراج طول الفئة من خلال العلاقة الاخرى لستورجز

$$C = \frac{\text{المدى}}{K}$$

K عدد الفئات المراد اختيارها حيث :

$$K = \sqrt{n}$$

اما التكرار النسبي : هو التكرار مقسوماً على مجموع التكرارات مضروباً بـ 100 ويرافق ذلك

تكرار تنازلي نسبي

تكرار تصاعدي نسبي

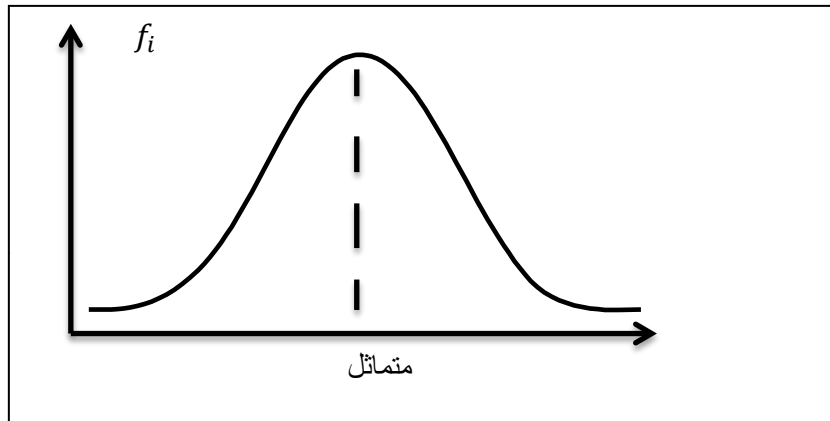
تختلف التوزيعات التكرارية (التوزيع الطبيعي المعياري) هو المنحني الذي يمثل الجرس المقلوب (اما اذا لم يكن متماثلاً فإنه يعاني من الالتواء فالالتواء يعطى بالعلاقة:

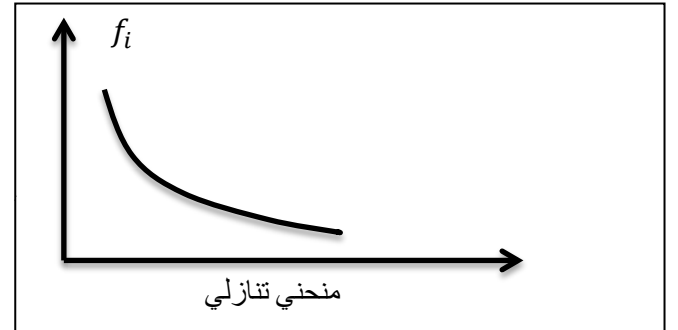
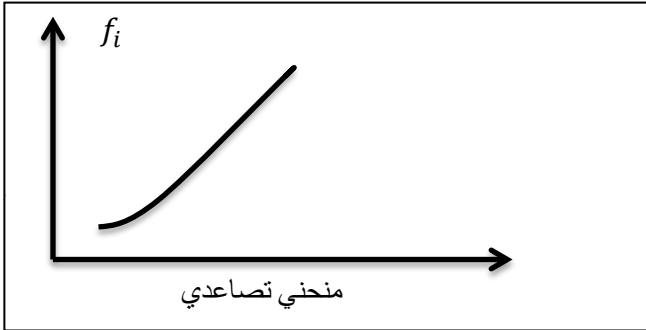
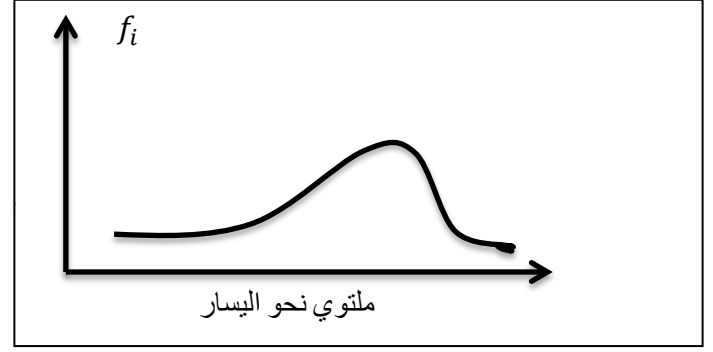
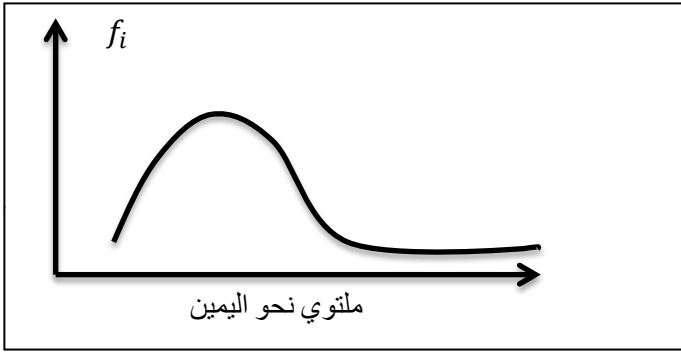
$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\bar{X} - Mod}{S_x} = \frac{3(\bar{X} - Med)}{S_x}$$

1- معامل الالتواء صفر (التوزيع التكراري طبيعي أو متماثل $\bar{X} = Mod = Med$)

2- معامل الالتواء موجب (التوزيع التكراري ملتوياً نحو اليمين $\bar{X} > Mod > Med$)

3- معامل الالتواء سالب (التوزيع التكراري ملتوياً نحو اليمين $\bar{X} < Mod < Med$)





مثال : بفرض لدينا بيان عددي مؤلف من أطوال 50 طالب في قسم علم الحياة في كلية العلوم

كانت موزعة كالآتي :

150,155,157,158,159.160,161,163,164,165×5,166,167,169.170,171×11,172,
173,175,176,177×5,178,179,181,182,183×3,185×2,187,190×2

المطلوب : 1- أحسب طول الفئة حسب علاقة ستور جز

2 - أوجد الجدول التكراري والتكرار النسبي

3 - أوجد التكرار التنازلي النسبي والتكرار التصاعدي النسبي



مكتبة
A to Z