كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف (1) الجداء الديكارتي لمجموعتين

لتكن A, B مجموعتين غير خاليتين ومنتهيتين حيث $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B=\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ فإن الجداء الديكارتي لـ A, B يعطى بالعلاقة:

$$A \times B = \{ (a_i, b_j) : a_i \in A, b_j \in B : i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m \}$$

مثال (1) لتكن $A=\{1,2,3\}$, $B=\{5,7\}$ فإن

$$A \times B = \{(1,5), (1,7), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7)\}$$

نلاحظ أن $n(A)=3$ ← عدد عناصر A و $n(B)=2$

$$n(A \times B) = 3 \times 2 = 6$$

مثال (2)

لتكن $A=\{2,5,7\}$ و $B=\{m,n\}$ المطلوب أوجد $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$

قارن $A \times B$, $B \times A$

$$A \times B = \{(2,m), (2,n), (5,m), (5,n), (7,m), (7,n)\}$$

$$B \times A = \{(m,2), (m,5), (m,7), (n,2), (n,5), (n,7)\}$$

$A \times B \neq B \times A$ الجداء الديكارتي ليس تبادلي

$$A \times A = \{2,5,7\} \times \{2,5,7\}$$

$$A \times A = \{(2,2), (2,5), (2,7), (5,2), (5,5), (5,7), (7,2), (7,5), (7,7)\}$$

$$B \times B = \{m,n\} \times \{m,n\} = \{(m,m), (m,n), (n,m), (n,n)\}$$

GLORY Notebooks

تعريف 2 لتكن $T=\{1,2,3,\dots,m\}$ ، $S=\{1,2,\dots,n\}$

ولتكن A مجموعة غير خالية

نسمي كل تطبيق (تابع) a من الشكل:

$$a: T\times S \longrightarrow A$$

والمعرّف بالشكل

$$a(i,j)=a_{ij}$$

مصفوفة (على A) من الشكل $m\times n$

إنّ العناصر

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$$
$$a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$$

تعيّن تماماً هذا التطبيق

إذا عوضنا هذه العناصر في أقواس متوسطة بالشكل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

نحصل على الشكل المذكور أعلى مصفوفة ونرمز لها عادة بالرمز:

$$[a_{ij}]_{m\times n}$$

m عدد الأسطر ، n عدد الأعمدة

في حال كان $n=m$ نقول المصفوفة **مصفوفة مربعة** ونرمز لها بـ:

$$[a_{ij}]_{n\times n}$$

GLORY Notebooks

• في حال $m=1$ تكون المصفوفة مؤلفة من سطر واحد ونسمي المصفوفة سطرية أو المتجه السطري وتكون بالشكل

$$[a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \dots\ a_{1n}]$$

• وفي حال $n=1$ تكون مؤلفة من عمود واحد ونسمي المصفوفة عمود أو متجه عمودي

أمثلة

$A_{2\times 2}$ مصفوفة مربعة $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$

$A_{1\times 4}$ مصفوفة سطرية $B=[1\ 2\ 3\ 5]$

$C_{3\times 1}$ مصفوفة عمود $C=\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$

تعريف ③ المصفوفتان المتساويتان

نقول عن المصفوفتان $A=[a_{ij}]$ $B=[b_{ij}]$ أنهما متساويتان إذا كان لهما نفس الشكل وتساوت جميع العناصر المتقابلة أي

$a_{ij}=b_{ij}\quad \forall\ i=1,2,\dots,m$

$\forall\ j=1,\dots,n$

مثال: لتكن $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & x\\ 2 & y & 3\\ z & -4 & w\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 3\\ 0 & 4 & 5\end{bmatrix}$

عين x,y,z,w حتى يكون $A=B$

$x=2\ ,\ y=-3\ ,\ z=0\ ,\ w=5$

GLORY Notebooks

العمليات على المصفوفات

تعريف (4): جمع مصفوفتين

ليكن لدينا المصفوفتين $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ فإن $A+B$ هي المصفوفة الجديدة $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ والتي تعرف بالشكل

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

تعريف (5): طرح مصفوفتين

ليكن $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ فإن $A-B$ هي المصفوفة الجديدة $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ حيث

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$$

مثال ليكن

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5 & -1\\ 0 & 4 & 6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 5 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

أوجد $A+B$, $A-B$

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 6 & 1\\ 5 & 6 & 3\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}4 & 4 & -3\\ -5 & 2 & 9\end{bmatrix}$$

تعريف (6): ضرب مصفوفة بعدد

ليكن $r\in\mathbb{R}$, ليكن $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ فإن:

$r.A=C$ حيث $C=[c_{ij}]$

$$c_{ij}=r.a_{ij}$$

في المثال السابق أوجد: $5A$

$$5A=\begin{bmatrix}15 & 25 & -5\\ 0 & 20 & 30\end{bmatrix}$$

بسهولة يمكن ملاحظة أنّ جمع مصفوفتين ليست عملية ثنائية في مجموعة

تعريف 7 جداء مصفوفتين

لتكن $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ، $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ عندئذ نرمز لجداء المصفوفتين A و B بالرمز $(A.B)$ ونعرّفه بالشكل:

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

حيث

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$$

مثال لتكن

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}_{2\times 3},\quad B=\begin{bmatrix}5\\4\\4\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}_{2\times 3}\cdot\begin{bmatrix}5\\4\\4\end{bmatrix}_{3\times 1}=\begin{bmatrix}3\times 5-1\times 4+2(4)\\ 0+4+16\end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$=\begin{bmatrix}15-4+8\\20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19\\20\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن شرط تعريف الجداء $A\cdot B$ هو أن يكون عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B

ومن الواضح أيضاً أن $A.B$ ليست عملية تبديلية وأحياناً لا تكون معرّفة $B.A$

تكون $A.B$ ، $B.A$ معرّفة فقط في حال كانت $A_{n\times n}$ ، $B_{n\times n}$ مربعتان ومن نفس البعد أي A,B فتكون $A.B=[\ ]_{n\times n}$ و $B.A=[\ ]_{n\times n}$

مثال

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(2)-1(-1) & 3(1)-1(0)\\ 4(2)+5(-1) & 4(1)+5(0)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6+1 & 3-0\\ 8-5 & 4+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

تعريف (8) منقول مصفوفة

ليكن $A_{m\times n}$ مصفوفة ما فإن منقول المصفوفة A^T التي نحصل عليها من A بجعل أعمدتها أسطرا وأسطرها أعمدة

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ -1 & 0 & 5\end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad A^T=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 0\\ 5 & 5\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

مثال:

$$B=\begin{bmatrix}5 & 4 & 7\end{bmatrix}_{1\times 3} \quad \text{فإن} \quad B^T=\begin{bmatrix}5\\ 4\\ 7\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

مثال

$$C=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & -1\end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad C^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

GLORY Notebooks

القطر الرئيسي لمصفوفة مربعة

لتكن $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ذي العناصر

القطر الرئيسي

القطر الرئيسي $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}\}$

القطر الثانوي

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

عناصر القطر الثانوي

تعريف ٩: أثر مصفوفة مربعة