كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : السادسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

حلقة كثيرات الحدود

تعريف: لتكن R حلقة تبديلية واحدية أي تعبير منتهي من الشكل:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

حيث $a_n \neq 0$ و $a_i \in R$ حيث $1 \leq i \leq n$

يدعى كثير حدود بالمحول x فوق الحلقة R ذات درجة n

$$\deg p(x) = n$$

* تسمى الـ a_i بمعاملات كثير الحدود $p(x)$
* المعامل a_n يسمى بالمعامل الرئيسي لكثير الحدود $p(x)$
* إذا كان $a_n = 1$ عندئذ نقول بأن $p(x)$ كثيرة حدود موحدة
* مجموعة كل كثيرات الحدود فوق الحلقة R نرمز لها بـ $R[x]$

$R[x]$ تم تزويدها بعمليتي $(+)$ و $(\cdot)$ بالشكل التالي:

$$\forall\, p(x), q(x) \in R[x]$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \; ; \; a_i \in R \quad , \quad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \; ; \; b_j \in R$$

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i$$

$$\deg(p(x) + q(x)) \leq \max(\deg p(x) + \deg q(x))$$

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{n+m} d_k x^k \qquad \text{حيث} \quad d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

$$\deg(p(x) \cdot q(x)) \leq \deg p(x) + \deg q(x)$$

عندئذ $(R[x], +, \cdot)$ حلقة.

مثال: لتكن $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة ولتكن:

$f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$

حيث $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1$ ، $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

المطلوب: أوجد $f(x) + g(x)$ و $f(x) \cdot g(x)$

الحل: من أجل $f(x)$:

$a_0 = -1$ ، $a_1 = 1$ ، $a_2 = -2$ ، $a_3 = 1$ ، $a_4 = 1$

من أجل $g(x)$: $b_0 = -1$ ، $b_1 = 1$ ، $b_2 = -1$ ، $b_3 = 1$ ، $b_4 = 0$

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\max(3,4)} (a_i + b_i) x^i = \sum_{i=0}^{4} (a_i + b_i) x^i$$

$$= -2 + 2x - 3x^2 + 2x^3 + x^4$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{n+m=7} d_k x^k = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_7 x^7$$

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

$$d_0 = a_0 b_0 = 1 \text{ ، } d_1 = \sum_{i=0}^{1} a_i b_{1-i} = a_0 b_1 + a_1 b_0 = -2$$

$$d_2 = \sum_{i=0}^{2} a_i b_{2-i} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 4$$

$$d_3 = -5 \text{ ، } d_4 = 4 \text{ ، } d_5 = -2 \text{ ، } d_6 = 0 \text{ ، } d_7 = 1$$

$$f(x) \cdot g(x) = x^7 - 2x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

ملاحظات:

1. $R \subset R[x]$
2. $a \neq p(x) = a \in R[x]$ فإن $\deg p(x) = 0$
3. إذا كانت $p(x) = 0 \in R[x]$ (كثيرة الحدود الصفرية) فإن $\deg p(x) = -\infty$
4. R حلقة تبديلية واحدية $\iff$ $R[x]$ حلقة تبديلية واحدية
5. R حلقة صحيحة $\iff$ $R[x]$ حلقة صحيحة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

6 إذا كانت R ساحة صحيحة عندئذ:

$$\deg(p(x)\cdot q(x)) = \deg p(x) + \deg q(x)$$

7 إذا كانت R حقل عندئذ $R[x]$ لا تكون حقل.

برهنة: لتكن R ساحة صحيحة عندئذ العناصر القابلة للقلب في $R[x]$ هي العناصر القابلة للقلب في R.

البرهان: ليكن $f(x)\neq 0$ عنصر قابل للقلب في $R[x]$

عندئذ يوجد $0\neq g(x)\in R[x]$ و $f(x)g(x)=1$

وبما أن R ساحة صحيحة عندئذ:

$$\deg(f(x)\cdot g(x)) = \deg(1)$$

$$\deg f(x) + \deg g(x) = 0$$

عندئذ $\deg f(x) = \deg g(x) = 0$

$\Rightarrow f(x)\in R$ & $g(x)\in R$ & $f(x)g(x)=1$

بالتالي $f(x)$ عنصر قابل للقلب في R.

نتيجة: إذا كان K حقلاً عندئذ العناصر القابلة للقلب في $K[x]$ هي العناصر القابلة للقلب في $K\setminus\{0\}$

أمثلة: ① العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{Z}[x]$ هي $\{-1,1\}$

② العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{R}[x]$ هي $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

③ العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{C}[x]$ هي ($\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد العقدية) هي $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ وذلك كون $\mathbb{C}$ حقل.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خوارزمية القسمة

مبرهنة ليكن k حقلاً و $k[x]$ حلقة كثيرات الحدود بالمتحول x وفق الحقل k وليكن $f(x), g(x) \in k[x]$ و $g(x) \neq 0$

عندئذ يوجد $q(x), r(x) \in k[x]$ بحيث:

$$f(x) = q(x)\,g(x) + r(x)$$

إما $r(x) = 0$ أو $\deg r(x) < \deg g(x)$

إضافة إلى ذلك فإن كلاً من $q(x)$ و $r(x)$ يتعينان بشكل وحيد.

مثال

$$f(x) = 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 1 \in Z_5[x]$$

$$g(x) = x^2 + 4x + 2 \in Z_5[x]$$

$$Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

نلاحظ أن:

$$f(x) = \underbrace{(3x^2 + 4x)}_{\text{ناتج القسمة}}\, g(x) + \underbrace{(2x + 1)}_{\text{باقي القسمة}}$$

مبرهنة ليكن k حقلاً، $k[x]$ حلقة كثيرات الحدود فوق الحلقة k وليكن $a \in k$ و $f(x) \in k[x]$ عندئذ فإن:

$f(a)$ هو باقي قسمة $f(x)$ على $x - a$

مثال أوجد باقي قسمة $f(x) = x^{10} + 1$ على $x - 1$

الحل الباقي هو $f(1) = 2$

مثال ليكن $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ حقل و:

$$f(x) = 3x^4 + x^3 + x^2 + 2 \in Z_5[x]$$

والمطلوب: ① أوجد العناصر القابلة للقلب في $Z_5[x]$

② أوجد باقي قسمة $f(x)$ على $x - 2$ في الحلقة $Z_5[x]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

③ أوجد باقي وناتج قسمة $f(x)$ على x^2+1

الحل ① بما أن Z_5 حقل عندئذ العناصر القابلة للقلب في $Z_5[x]$ هي $\{1, 2, 3, 4\}$

② $f(2) = 2$

③ ناتج القسمة $\Leftarrow 3x^2 + x - 2$

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & 3x^4 + x^3 + x^2 + 2 \\ \hline \mp 3x^4 \quad \mp 3x^2 & \\ \hline 0 \quad +x^3 - 2x^2 + 2 & \\ \mp x^3 \quad \mp x & \\ \hline 0 \quad -2x^2 - x + 2 & \\ \pm 2x^2 \quad \pm 2 & \\ \hline 0 \quad -x + 4 \Rightarrow \text{باقي القسمة} & \end{array}$$

تعريف: لتكن R حلقة و $f(x), g(x) \in R[x]$ و $g(x) \neq 0$

يقال أن $g(x)$ تقسم $f(x)$ في $R[x]$

($f(x)$ تقبل القسمة على $g(x)$ في $R[x]$)

إذا وجد $h(x) \in R[x]$ بحيث $f(x) = h(x)g(x)$ ونكتب $g(x) \mid f(x)$

تعريف: R حلقة و $f(x) \in R[x]$ ، يقال عن العنصر $\alpha \in R$ أنه (صفر أو جذر) لكثيرة الحدود $f(x)$ إذا كان $f(\alpha) = 0$

مثال $p(x) = x^2 + 2 \in \mathbb{C}[x]$

$\alpha = \sqrt{2}\, i$ جذر لـ $p(x)$ لأن $p(\alpha) = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

برهنة لتكن k حقلاً و $k[x]$ حلقة كثيرات الحدود فوق k
ولتكن $a \in k$ ، $f(x) \in k[x]$
عندئذٍ: a جذر لـ $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $(x-a) / f(x)$

برهنة لتكن $k[x]$ حلقة كثيرات الحدود فوق الحقل k
ولتكن $f(x) \in k[x]$ و $\deg f(x) = n \geq 1$
عندئذٍ $f(x)$ تملك n جذراً على الأكثر في k

ملاحظة هذه البرهنة غير صحيحة من أجل كثيرات الحدود فوق الحلقات، فعلى سبيل المثال:
$f(x) = x^2 + 3x + 2 \in Z_6[x]$
تملك أربعة أصفار في Z_6 هي: $\{1, 2, 4, 5\}$
بينما $\deg f(x) = 2$

برهنة إذا كان k حقلاً عندئذٍ حلقة كثيرات الحدود $k[x]$ هي سامة إيديالات رئيسية أي كل إيديال I فيها هو إيديال رئيسي مولد بكثيرة الحدود ذات الدرجة الأصغر من I.

دراسة كثيرات الحدود اللامختزلة في $R[x]$ حيث R سامة صحيحة

تعريف: لتكن R سامة صحيحة و $f(x) \in R[x]$ $\neq 0$
يقال عن كثيرة الحدود $f(x)$ أنها لامختزلة في $R[x]$ إذا تحقق:
① $f(x)$ عنصر غير قابل للقلب في $R[x]$
② لا يمكن كتابة $f(x)$ على شكل جداء كثيرتي حدود كل منها غير قابل للقلب في $R[x]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بصف آخر : إذا كانت $f(x)=g(x)\times h(x)$ حيث :

$g(x)\ ,\ h(x)\in R[x]$

عندئذ إما $g(x)$ قابل للقلب في $R[x]$

أو $h(x)$ قابل للقلب في $R[x]$

مثال ① $f(x)=x^2-4=(x-2)(x+2)$ مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$

$x+2\ ,\ x-2$ عنصران غير قابلان للقلب في $\mathbb{Z}[x]$

② $f(x)=6x+3=3(2x+1)$ مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$

3 و $2x+1$ عنصران غير قابلان للقلب في $\mathbb{Z}[x]$

③ $f(x)=2x+5\in\mathbb{Z}[x]$ كثير حدود لا مختزل في $\mathbb{Z}[x]$

البرهان $f(x)$ عنصر غير قابل للقلب في $\mathbb{Z}[x]$

و العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{Z}[x]$ هي $\{-1,1\}$

نفرض جدلاً بأن $f(x)$ مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$

عندئذ $g(x)\ ,\ h(x)\in\mathbb{Z}[x]$; $f(x)=g(x)\,h(x)$

حيث $g(x)$ ليست قابلة للقلب في $\mathbb{Z}[x]$

$h(x)$ ليست قابلة للقلب في $\mathbb{Z}[x]$

بما أن $\mathbb{Z}$ سامة صحيحة عندئذ $\deg f(x)=\deg g(x)+\deg h(x)$

$1=\deg g(x)+\deg h(x)$

إما $\deg h(x)=1$ ، $\deg g(x)=0$

$h(x)=a_1x+b_1$; $a_1\neq 0$ ، $g(x)=b\neq 0$

$f(x)=2x+5=b(a_1x+b_1)=ba_1x+bb_1$

$$\left.\begin{array}{l} a_1b=2\Rightarrow b\mid 2 \\ bb_1=5\Rightarrow b\mid 5 \end{array}\right\}\Rightarrow b\mid \gcd(2,5)$$

$$b\mid 1$$

بالتالي $b=1$ أو $b=-1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي $g(x) = b$ عنصر قابل للقلب في $\mathbb{Z}[x]$ وهذا مرفوض.

أو

$\deg g(x) = 1$ ، $\deg h(x) = 0$

نحصل على تناقض في هذه الحالة

بالتالي الفرض الجدلي خاطئ، وعندئذ:

$f(x) = 2x + 5$ كثيرة حدود لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z