كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي١

المحاضرة : الثانية/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السؤال الأول:

أوجد القسم الحقيقي والقسم التخيلي لـ $w = \frac{iz+1}{1+\bar{z}}$

الحل:

$$w = \frac{i(x+iy)+1}{1+(x-iy)} = \frac{ix-y+1}{1+x-iy}$$

نضرب بالبسط والمقام بمرافق المقام:

$$= \frac{(i-y+1)(1+x+iy)}{(1+x-iy)(1+x+iy)}$$

$$= \frac{(1-y)(1+x)+iy-iy^2+ix+ix^2-xy}{(1+x^2)+y^2}$$

$$= \frac{(1-y)(1+x)-xy+i(x(x+1)+y(1-y))}{1+x^2+y^2+2x}$$

$$= \frac{(1-y)(1+x)-xy+i(x^2+x-y-y^2)}{(1+x^2)+y^2}$$

$$= \frac{(1-y)(1+x)-xy+i(x+y+x^2-y^2)}{(1+x^2)+y^2}$$

$$= \frac{(1-y)(1+x)-xy+i((x+y)(1+x-y))}{(1+x^2)+y^2}$$

$w = u + iv$

$$u = \frac{(1-y)(1+x)-xy}{(1+x^2)+y^2}, \quad v = \frac{(x+y)(1+x-y)}{(1+x^2)+y^2}$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

السؤال الثاني:

أوجد صورة الدالة $z = R\cos t + iR\sin t$ حيث $0 \le t \le 2\pi$ بواسطة الدالة $w = \frac{z}{\bar{z}}$

الحل:

$z = x + iy$

$x = R\cos t$

$y = R\sin t$

نكتب w بالشكل الديكارتي:

$$w = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{x+iy}{x-iy} = \frac{(x+iy)(x+iy)}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$w = u + iv$

ومنه:

$$u = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

نعوض قيمة x و y في u و v

$$u = \frac{R^2\cos^2 t - R^2\sin^2 t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} = \frac{R^2(\cos^2 t - \sin^2 t)}{R^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} \overset{\text{(قانون)}}{=} \cos 2t$$

$$v = \frac{2R\cos t \cdot R\sin t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} = \frac{R^2 \cdot 2\cos t \cdot \sin t}{R^2} \overset{\text{(قانون)}}{=} \sin 2t$$

$u^2 + v^2 = 1$

وهي معادلة كرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 1

بشرط $0 \le t \le 2\pi$ إذا دارت z دورة واحدة فإن w تدور مرتين.

$z = R(\cos t + i\sin t) = Re^{it}$

دائرة نصف قطرها R زاويتها t

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$w = \frac{Re^{it}}{Re^{-it}} = e^{2it}$$ حيث

دارة نصف قطرها R وزاويتها $2t$.

السؤال الثالث:

أوجد صورة طويلة الدالة $w = \sin z$ في النقطة:

$$z = \pi + i \ln(2+\sqrt{5})$$

الحل: نكتب w بالشكل الديكارتي:

$$w = \sin z = \sin(x + iy)$$

$$= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$ (قانون)

$$w = \sin x \, ch y - i \cos x \, sh y$$

$$u = \sin x \, ch y$$

$$v = -\cos x \, sh y$$

حساب الطويلة:

$$|w| = (\sin^2 x \cdot ch^2 y + \cos^2 x \, sh^2 y)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\sin^2 x \, ch^2 y + (1 - \sin^2 x) sh^2 y)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\sin^2 x \cdot ch^2 y + sh^2 y - \sin^2 x \, sh^2 y)^{\frac{1}{2}}$$

$$= [\sin^2 x \underbrace{(ch^2 y - sh^2 y)}_{=1} + sh^2 y]^{\frac{1}{2}}$$

$$|w| = (\sin^2 x + sh^2 y)^{\frac{1}{2}}$$

نعوض x, y في $|w|$

$$|w| = (\sin^2 \pi + sh^2(\ln(2+\sqrt{5})))^{\frac{1}{2}}$$

$$= (sh^2(\ln(2+\sqrt{5})))^{\frac{1}{2}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= Sh(\ln(2+\sqrt{5}))$

(قانون) $= \frac{e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}}{2} = \frac{2+\sqrt{5} - \frac{1}{2+\sqrt{5}}}{2}$

$= \frac{2+\sqrt{5} - \frac{(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}}{2} = \frac{2+\sqrt{5} - \frac{2+\sqrt{5}}{-1}}{2}$

$= \frac{2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

هنا يعني أن الدالة العقدية $\sin z$ في الفضاء العقدي يمكن أن تأخذ قيمة أكبرها 1 (وهنا تختلف عن الفضاء الحقيقي)

$-1 \leq \sin x \leq 1$

السؤال الرابع:

اكتب الصورة الجبرية للدالة $\text{Arc}\sin i\frac{\pi}{3}$

تذكرة: $\text{Arc}\sin z = -i\ln(iz + \sqrt{1-z^2})$

الحل:

نفرض $z = i\frac{\pi}{3}$ ونعوض بالقانون السابق:

$\text{Arc}\sin\frac{\pi}{3} = -i\ln\left(i\cdot\frac{i\pi}{3} + \sqrt{1-\left(\frac{i\pi}{3}\right)^2}\right)$

$= -i\ln\left(\frac{-\pi}{3} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right) = -i\ln\left(\frac{-\pi}{3} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right)$

$= -i\ln\left(\frac{-\pi}{3} + \frac{\sqrt{9+\pi^2}}{3}\right) = -i\ln\left(\frac{\sqrt{9+\pi^2}-\pi}{3}\right)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

السؤال الخامس:

أثبت أنّه إذا كان: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 1$

فالمطلوب: $(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = 1$

الحل:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha) = 1$$

$$(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = \frac{1}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n}$$

من الفرض $= 1$

وهنه $(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = 1$

السؤال السادس:

أوجد كل الأعداد العقدية التي تحقق المعادلة $\bar{z} = z^2$

الحل:

نضع العدد بالشكل: $(x+iy) = (x^2 - y^2) + 2xyi$

بالمطابقة بين الطرفين:

$$x = x^2 - y^2 \quad \cdots (1)$$

$$-y = 2xy \quad \cdots (2)$$

نميز حالتين لـ y:

حالة ①: $y = 0$ نعوض في (1):

$$x = x^2 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1-x) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ أو } x = 1$$

فنجد: $z_1 = 0$

$z_2 = 1$

حالة ②: $y \neq 0$ من (2): $x = \frac{-1}{2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعوض في [1]

$$y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \mp\sqrt{\frac{3}{4}}$$

ومنه

$$z_3 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_4 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

السؤال الرابع:

أوجد كل من x, y و u, v في العلاقة:

$$\frac{1}{x+iy} + \frac{1}{u+iv} = 1$$

الحل:

$$\frac{u+iv+x+iy}{(x+iy)(u+iv)} = 1$$

$$u+iv+x+iy = (x+iy)(u+iv)$$

$$(u+x)+i(v+y) = (xu-uv)+i(xv+uy)$$

بالمطابقة:

$$x+u = xu - yv \quad \cdots [1]$$

$$v+y = xv + uy \quad \cdots [2]$$

من [1]

$$x = \frac{-yv-u}{1-u}$$

نعوض في [2]

$$v - xv = (u-1)y$$

$$v + \left(\frac{u+yv}{1-u}\right)v = (u-1)y$$

نشر الطرف الأول نوحد المقامات ونختزل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$y = \frac{-v}{(1-u)^2 + v^2}$$

* نعوض قيمة y في

$$x = \frac{u^2 + v^2 - u}{(1-u)^2 + v^2}$$

السؤال الثامن:

أثبت أن:

$$f(z) = x^n \sin\alpha - \lambda^{n-1} x \sin^n\alpha + \lambda^n \sin(n-1)\alpha$$

$$(x^2 - 2\lambda x\cos\alpha + \lambda^2)$$

تقبل القسمة على:

الحل:

(نحلل هذا المقدار بالإتمام إلى مربع كامل)

$$x^2 - 2\lambda x\cos\alpha + \lambda^2\cos^2\alpha - \lambda^2\cos^2\alpha + \lambda^2$$

$$= (x - \lambda\cos\alpha)^2 + \lambda^2(1 - \cos^2\alpha)$$

$$= (x - \lambda\cos\alpha)^2 + \lambda^2(\sin^2\alpha)$$

$$= (x - \lambda\cos\alpha + i\lambda\sin\alpha)(x - \lambda\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

$$= [x - \lambda(\cos\alpha - i\sin\alpha)]\,(x - \lambda(\cos\alpha + i\sin\alpha))$$

$$= (x - \lambda e^{-i\alpha})(x - \lambda e^{i\alpha})$$

(لإكمال الإثبات) نثبت:

$$f(\lambda e^{-i\alpha}) = 0$$

(وظيفة)

* طريقة ثانية لتحليل هذا المقدار: $x^2 - 2\lambda x\cos\alpha + \lambda^2$

$$x^2 - 2\lambda x\cos\alpha + \lambda^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$

$$= x^2 - 2\lambda x\cos\alpha + \lambda^2\cos^2\alpha + \lambda^2\sin^2\alpha$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= (x - \cos\alpha)^2 + \lambda^2 \sin^2\alpha$

$= (x - \lambda\cos\alpha + i x \sin\alpha)(x - \lambda\cos\alpha - \lambda i \sin\alpha)$

$= (x - \lambda\cos\alpha + i\sin\alpha))(x - \lambda(\cos\alpha - i\sin\alpha))$

$= (x - \lambda e^{i\alpha})(x - \lambda e^{-i\alpha})$

بعض القوانين الهامة :

(1) $\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$

$= \cos x \cdot \text{ch}y + i \sin x \, \text{sh}y$

(2) $\text{ch}z = \text{ch}(x + iy)$

$= \text{ch}x \cdot \text{ch}iy + \text{sh}x \cdot \text{sh}iy$

$= \text{ch}x \cdot \cos x + i \, \text{sh}x \sin y$

(3) $\text{sh}z = \text{sh}(x + iy)$

$= \text{sh}x \cdot \text{ch}iy + \text{ch}x \, \text{sh}iy$

$= \text{sh}x \cos y + i \, \text{ch}x \sin y$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z