كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الثانية/عملي/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

السؤال الأول:

لتكن $\mathbb{R}$ حلقة و $M_n(\mathbb{R})$ أسرة المصفوفات المربعة القياسية $n\times n$ المعاملات من $\mathbb{R}$، إن $(M_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ تشكل حلقة حيث:

+ هي عملية جمع المصفوفات المألوفة و · هي عملية جداء المصفوفات المألوفة يعني:

$A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$

* $A+B=C=(C_{ij})$ ؛ $C_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ & $1\le i,j\le n$
* $A.B=(a_{ij})(b_{ij})=(e_{ij})$

حيث: $1\le i,j\le n$ ، $e_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$

حيادي الجمع هو المصفوفة الصفرية وحيادي الجداء هو المصفوفة الواحدية:

$$I_n=(\delta_{ij}) \;;\; \delta_{ij}=\begin{cases}1 & ; i=j\\ 0 & ; i\neq j\end{cases}$$

بسهولة نتحقق أنّ $(M_n(\mathbb{R}),+)$ زمرة تبديلية حيث أن النظير الجمعي لكل $A\in M_n(\mathbb{R})$ هو المصفوفة $-A$ حيث أن $-A=(-a_{ij})$ و $-a_{ij}$ هو النظير الجمعي لـ a_{ij} في الحلقة $\mathbb{R}$ وذلك من أجل $1\le i,j\le n$

إن جداء المصفوفات توزيعي على جمعها وبالتالي نستنتج أن

$(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ حلقة بواحدة.

* يوجد مجموعة من الحلقات الجزئية من $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ مثلاً:

- حلقة المصفوفات القطرية:

$D_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) ; a_{ij} = 0 ; i \neq j\}$

- حلقة المصفوفات المثلثية العليا:

$T^n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) ; a_{ij} = 0 ; i > j\}$

- حلقة المصفوفات المثلثية السفلى:

$T_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) ; a_{ij} = 0 ; i < j\}$

جميعها حلقات جزئية بواحدة (الحيادي الضربي فيها هو المصفوفة الواحدية).

السؤال الثاني:

لتكن R حلقة تبديلية بواحدة 1، إذا وجد عنصر وحيد $y \in R$ بحيث يكون $xyx = x$ برهن أن:

$x \cdot y = y \cdot x = 1$ (أي أن x واحدي في R)

الحل:

أولاً سوف نثبت أنه في حال وجد $a \in R$ بحيث $x \cdot a = 0$ عندئذٍ $a = 0$

من الفرض:

$x = xyx \Leftrightarrow x = xyx + 0$

$\Leftrightarrow x = xyx + xa = xyx + xax$

$= x(y + a)x$

من وحدانية y نجد أن: $y + a = y$ ومنه ينتج أن $a = 0$

ثانياً: لنبيا $x = xyx \Leftrightarrow x - xyx = 0$

بالاعتماد على أولاً نجد أن:

$x(1 - yx) = 0 \Rightarrow 1 - yx = 0 \Rightarrow 1 = yx$

وبصورة مشابهة نجد أن: $x.y = 1$ بالتالي x واحدة في R.

السؤال الثالث:

لتكن R مجموعة التوابع المستمرة على المجال $[0,1]$

$R = \{ f : [0,1] \to R ;$ مستمرة $f \}$

إن $(f, +, .)$ حلقة حيث أن $+$ عملية جمع التوابع و . عملية تركيب التطبيقات.

أثبت أن R تحوي قواسم للصفر.

الإثبات:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & , \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \ \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - x & , \ \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

إن g و f تابعان مستمران بحيث أن:

$$(f.g)(x) = \begin{cases} f(x).g(x) = (\frac{1}{2} - x).(0) = 0 & , \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(x).g(x) = (0).(\frac{1}{2} - x) = 0 & , \ \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

بالتالي $(f.g)(x) = 0$ من أجل كل $x = [0,1]$ إذاً $f.g = 0$ و R تحوي قواسم للصفر

انتهت الحلول المكتوبة