كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

نفرض أن X متغير عشوائي متقطع يتبع توزيع ثنائي الحد

$X \sim Binomal(n, \alpha)$; $0 \le x \le n$

وهذه الحالة: $f(x) = \binom{n}{x} (1-\alpha)^{n-x} \alpha^x$

على اعتبار n كبيرة نسبياً و α صغيرة نسبياً لنأخذ

$\lambda = n\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{n}$ عندئذٍ:

$$f(x) = \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$f(x) = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

نجد $n \to \infty$ نحصل على:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x} = 1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{x+1}{n}\right) \to 1$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-\lambda} \quad (1)$$

لأنّ:

$$\left(1 + \frac{c}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^c$$

وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{1}{x!} \cdot 1 \cdot \lambda^x \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \sim Poisson(\lambda)$$

وهو توزيع بواسون بمعلم $\lambda = n\alpha$ وبالتالي يمكن اعتبار أن توزيع ثنائي الحد يؤول إلى توزيع بواسون عندما تكون n كبيرة و α صغيرة و $\lambda = n\alpha$

توزيع الهيبرجيومتري:

نفرض أنه لدينا علبة فيها N كرة متماثلة M كرة بيضاء والباقي $N-M$ كرة سوداء نريد أن نسحب n كرة على التتالي بدون إعادة فما هو احتمال الحصول على x كرة بيضاء خلال عملية السحب.

في هذه الحالة إن عدد إمكانيات سحب x كرة بيضاء هو $\binom{M}{x}$ وعدد إمكانية سحب $n-x$ كرة سوداء هو $\binom{N-M}{n-x}$

يحصل على x كرة بيضاء خلال عملية سحب n كرة بـ $\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}$ طريقة.

يمكن سحب n كرة من N كرة في العلبة على التتالي بدون إعادة بـ $\binom{N}{n}$ طريقة.

$$f(x) = P(X=x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x \geq \max(0, n-(N-M)) = \max(0, n+M-N)$

$x \leq \min(n, M)$

عموماً في حوادث (تجارب) السحب على التالي دون إعادة عندما نسحب عينة مكونة من n عنصر من مجتمع فيه N عنصر بحيث أن بعض عناصر هذا المجتمع تتمتع بخاصية ما والبعض الآخر لا يتمتع بهذه الخاصية و عدد العناصر التي تمتلك هذه الخاصية في المجتمع الكلي هو هي M.

ليكن x متغير عشوائي يعبر عن عدد العناصر المسحوبة والمتمتعة بهذه الخاصية بهذه الحالة نقول بأنّ X يتبع توزيعاً هايبرجيومترياً بدالة توزيع احتمالي:

$$f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad ; \quad \max(0, n+M-N) \leq x \leq \min(n, M)$$

التوزيع المستمر:

المتغير العشوائي هو دالة من فضاء العينة إلى $\mathbb{R}$ إذا كانت X متغيراً عشوائياً عندئذٍ التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x هو:

$$f(x) = P(x \in B) \quad ; \quad X(x) = B \subset S$$

إذا كان x متغير عشوائي منفصل $\Leftrightarrow$ يوجد عدد منتهٍ أو معدود من القيم غير المعدومة له تتوافق مع الاحتمالات $p_1, p_2, \ldots$ بمعنى أن نأخذ الاحتمال p_i وعلى أن يحقق:

$$\sum_{i \in I} p_i = 1 \Rightarrow \sum_{x \in \mathbb{R}} P(X=x) = 1 \Leftrightarrow x \text{ منقطع}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نقول عن متغير عشوائي إنّه مستمر إذا تحقق:

$$P(X=x)=0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

مثال: نعرف التوزيع الاحتمالي $P(x)$ بالشكل:

$$P(a<x<b)=\begin{cases} b-a & ; \quad 0<a,b<1 \\ 0 & ; \quad \text{حالات ذلك} \end{cases}$$

مع:

$$P(x<0)=P(x>1)=0$$

$$P\left(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P\left(x>\frac{2}{3}\right)=P\left(\frac{2}{3}<x<1\right)+P(x>1)=1-\frac{2}{3}+0=\frac{1}{3}$$

$$P(X=x)=P(x<X<x)=x-x=0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

وبالتالي x متغير عشوائي مستمر.

---

* نقول عن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ إنها دالة كثافة احتمالية إذا تحقق:

$$f(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$$

- نقول عن متغير عشوائي مستمر إنّه متغير عشوائي مستمر مطلقاً إذا وجدت دالة كثافة احتمالية f بحيث:

$$P(a<x<b)=\int_a^b f(x)\,dx=1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* بعض التوزيعات المستمرة وطرق الهامة:

التوزيع المنتظم على المجال $[\ell, R]$

دالة الكثافة الاحتمالية تعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{R-\ell} & ; \ \ell < x < R \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$p(a \le x \le b) = \int_a^b \frac{1}{R-\ell}\, dx = \left[\frac{x}{R-\ell}\right]_a^b = \frac{b-a}{R-\ell}$$

التوزيع الأسي:

دالة الكثافة الاحتمالية تعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; \ x \ge 0 \\ 0 & ; \ x < 0 \end{cases}$$

وضح أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$p(a \le x \le b) = \int_a^b e^{-x}\, dx = e^{-a} - e^{-b}$$

انتهت المحاضرة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة