كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : **الخامسة**/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٢٠٢٦

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

بعض المفاهيم الأساسية في مجموعة الأعداد الصحيحة:

تعريف:

نرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز $\mathbb{Z}$ ونعرف بأنها المجموعة $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, 2, 1, 0, -1, -2, \dots\}$

نرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة السالبة بالرمز $\mathbb{Z}^-$ وهي

$\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, \dots\}$

ونرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز $\mathbb{Z}^+$ وهي:

$\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$

مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية وهي $2\mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z} = \{Z = 2k, k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$

مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية وهي:

$2\mathbb{Z}+1 = \{Z = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}$ وهي:

تعريف: إذا كان a و b عددين صحيحين وكان $b \neq 0$ عندئذٍ نقول إذا العدد b قاسم للعدد a أو عامل لـ a أو إنه a مضاعف العدد b أو a يقبل القسمة على b في $\mathbb{Z}$ إذا وجد عدد صحيح c من $\mathbb{Z}$ بحيث يكون

$a=c.b$ ونرمز لذلك بالرمز $b|a$

تعريف: ليكن a عدداً صحيحاً مختلفاً عن الصفر $(a\neq 0)$

نقول عن a عدد بسيط إذا كان $a\neq \pm 1$ وكانت قواسم العدد a هي ± 1 و $\pm a$ فقط.

$a=qb+r$ و $0\leq r<b$

حيث q و r أعداد صحيحة ~~موجبة~~ وموجبة.

ملاحظة: الخوارزمية السابقة: نقول a المقسوم و b المقسوم عليه و q ناتج القسمة و r باقي القسمة أو عامل له النظرية الأساسية في الحساب:

كل عدد صحيح موجب إما يساوي الـ 1 أو نكتبه بشكل وحيد كجداء أعداد بسيطة موجبة (التحليل إلى عوامله الأولية)

مثال: إذا كان 12 عدداً صحيحاً موجباً فإنه يكتب على شكل جداء عوامله أولية $12=2\times 2\times 3$

عوامله بسيطة، أعداد صحيحة موجبة، القاسم المشترك الأعظم:

إذا كان a و b عددين صحيحين مختلفين عن الصفر فإننا نعرف القاسم المشترك الأعظم للعددين a و b بأنه أكبر عدد صحيح موجب يقسم كلاً من a و b في آنٍ واحد ونرمز له $gcd(a,b)$

ملاحظة: $gcd(a,b)=1$ يعني أن العددين الصحيحين a و b أوليين فيما بينهما.

مثال: $gcd(5,1)=1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- الرمز (المجموعات والعمليات الثنائية عليها).

العملية الثنائية:

لتكن A مجموعة ما غير خالية ندعو كلّ تطبيق f

$f: A \times A \to A$

عملية ثنائية جبرية أو اختصاراً عملية ثنائية أو قانون تركيب على A ويمكن أن نرمز له بدلاً من الرمز f بالرمز * ونكتب

* عملية ثنائية معرفة بالشكل

$*: A \times A \to A$

$(a,b) \to *(a,b)$

أي بكلام آخر يمكن أن نقول بأنّ العملية الثنائية المعرفة على A وهي * ما هي إلّا وسيلة (قاعدة) تربط أي عنصر بين a و b من A ; $(a,b) \in A \times A$ وفق ترتيب معيّن بعنصر وحيد هو $*(a,b)$.

بعض الملاحظات:

① يمكن أن نرمز للعملية الثنائية بأحد الرموز التالية

T أو ⊥ أو ○ أو △ أو □ ...

② نرمز لـ $*(a,b)$ والتي هي صورة العنصر (a,b) وفق * بالرمز $a*b$ وندعوها ناتج العنصر a و b (أو حاصل تركيب العنصر بين (a,b)) وفق * في هذه الحالة نكتب

$*: A \times A \to A$

$*(a,b) = a*b$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

③. نرمز لعملية تركيب العملية * المعرفة على A بعملية الضرب وعلى a*b بجداء العنصرين a و b والمقصود هنا بـ * عملية الضرب العادية المعرفة على المجموعات العددية وأحياناً بدلاً من الرمز * نستخدم الرمز (+) ونقصد بها عملية الجمع ولكنها ليست عملية الجمع العادية المعرفة على المجموعات العددية وندعو a+b ناتج جمع العنصر a و b من A

④. يمكن تعريف أكثر من عملية ثنائية على المجموعة الواحدة.

- بعض خواص العمليات الثنائية:

لتكن * عملية ثنائية معرفة على مجموعة ما غير خالية عندئذٍ:

①. الخاصة التبديلية: نقول عن العملية * المعرفة على A حيث A ≠ ∅ أنها تبديلية على عناصر A إذا تحقق الشرط $\forall a,b \in A;\ a*b=b*a$.

②. الخاصة التجميعية: نقول عن العملية الثنائية * أنها تجميعية على عناصر المجموعة A إذا تحقق الشرط التالي $\forall a,b,c \in A:\ (a*b)*c=a*(b*c)$

وإذا كانت * تجميعية فإنه الشرط السابق محقق ويكون لدينا

(I) $(a*b)*c=a*(b*c)=a*b*c$

وفي هذه الحالة ندعو a*b*c القيمة المشتركة للطرفين في العلاقة I

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: إذا كانت $*$ عملية ثنائية معرفة على مجموعة ما غير خالية أي $A \neq \varphi$ عندئذٍ ندعو الثنائية $(A, *)$ بنية جبرية أو نظاماً جبرياً"

مثال: لتكن $A = \mathbb{Z}$ ولنعرّف على $\mathbb{Z}$ العملية $*$ التالية

$$a * b = a.b$$

ويمكن أن نعرّف عملية أخرى على $\mathbb{Z}$ مثل العملية T بالشكل التالي:

$$\forall a,b \in \mathbb{Z} : a T b = a + b + 2ab$$

حيث $.$ و $+$ عمليتا الضرب والجمع العاديات في $\mathbb{Z}$.

تذكرة مهمة جداً"

تعريف العملية المغلقة: لتكن $A \neq \varphi$ مجموعة ما غير خالية نقول عن العملية الثنائية $*$ المعرفة على المجموعة أنها مغلقة على عناصر A إذا تحقق الشرط

$$\forall a,b \in A : a * b \in A.$$

مثال: ادرس خواص العمليتين $*$ و T المعرفتين بالشكل

$$* : \forall a,b \in \mathbb{Z} : a * b = a.b$$

$$T : \forall a,b \in \mathbb{Z} : a T b = a + b + 2a.b$$

الحل:

$$* \quad \forall a,b \in \mathbb{Z} : a * b \in \mathbb{Z}$$

① $*$ مغلقة؟

العملية $*$ مغلقة على عناصر $\mathbb{Z}$ إذا تحقق الشرط

$$\forall a,b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a * b \in \mathbb{Z}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لو أخذنا a=3 , b=5 فإن

$a*b = \frac{3\times 5}{2} = \frac{3\cdot 5}{2} = \frac{15}{2} \notin \mathbb{Z}$

إذن الشرط غير محقق وهنا * ليست عملية مغلقة على $\mathbb{Z}$

* تبديلية ؟

* تبديلية على عناصر $\mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$\forall a,b \in \mathbb{Z} : a*b = \frac{a\cdot b}{2} = \frac{b\cdot a}{2} = b*a$

وهنا * تبديلية

* تجميعية على عناصر $\mathbb{Z}$ إذا تحقق الشرط

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z} : (a*b)*c = a*(b*c)$

$T_1 = (a*b)*c = \left(\frac{a\cdot b}{2}\right)*c$

$= \frac{\left(\frac{a\cdot b}{2}\right)*c}{2} = \left(\frac{a\cdot b}{2}\right)\cdot c\cdot\frac{1}{2} = \frac{a\cdot b\cdot c}{4}$

$T_2 = a*(b*c) = a*\left(\frac{b\cdot c}{2}\right) = \frac{a\cdot\left(\frac{b\cdot c}{2}\right)}{2}$

$= a\cdot\left(\frac{b\cdot c}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{a\cdot b\cdot c}{4}$

$\Rightarrow T_1 = T_2$

والعملية تجميعية على عناصر $\mathbb{Z}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- العملية الثنائية المعرفة على $\mathbb{Z}$ وهي T

$\forall a,b \in \mathbb{Z} : aTb = a+b+2ab$

① . إثبات العملية T مغلقة على عناصر $\mathbb{Z}$ لأنّ

$\forall a,b \in \mathbb{Z} : aTb = a+b+2ab \in \mathbb{Z}$.

لإثبات $+$ و $\cdot$ هما عمليتا الجمع والضرب العاديتان المعرفتان في $\mathbb{Z}$ وهما داخليتان على $\mathbb{Z}$ أي مغلقتان على $\mathbb{Z}$.

② . إثبات العملية T عملية تبديلية على $\mathbb{Z}$ لأنّ

$\forall a,b \in \mathbb{Z} : aTb = a+b+2ab$

$= b+a+2.b.a = bTa$.

③ . T تجميعية على عناصر $\mathbb{Z}$ $\Longleftrightarrow$ T تجميعية

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z} : (aTb)Tc = aT(bTc)$

$T_1 = (aTb)Tc = (a+b+2ab)Tc$

$= (a+b+2ab)+c+2(a+b+c+2ab).c$

$T_1 = a+b+c+2ab+2ac+2bc+4abc$.

$T_2 = aT(bTc) = aT(b+c+2bc)$

$= a+b+2bc+2(b+c+2bc)$

$= a+b+c+2bc+2ab+2ac+4bc$

نلاحظ : $T_1 = T_2$ والعملية تجميعية على عناصر $\mathbb{Z}$

- العناصر المميزة بالنسبة لعملية ثنائية معرفة على مجموعة ما غير خالية

العنصر الحيادي : لتكن A مجموعة ما غير خالية ولتكن $*$ عملية ثنائية معرفة على عناصر A . نقول عن العنصر e أنّه عنصر حيادي في المجموعة A بالنسبة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

للعملية * إذا تحقق الشرط التالي:

$\forall x \in E : \underbrace{x * e = x}_{1} \wedge \underbrace{e * x = x}_{2}$

ملاحظة:

1) في حال عدم تحقق أحد الشرطين 1) أو 2) نقول أنّه لا يوجد عنصر حيادي في A بالنسبة للعملية *

2) في حال أنّ العملية * تبديلية على عناصر A عندئذٍ لبرهان أنّ العملية * يوجد عنصر حيادي بالنسبة لها في A نكتفي ببرهان أحد الشرطين 1) أو 2)

العنصر النظير (المقلوب)

- لتكن A مجموعة ما غير خالية $(A \neq \varphi)$ و * عملية جبرية ثنائية معرّفة على A ونفرض e العنصر الحيادي في A بالنسبة لـ * عندئذٍ نقول ندعو العنصر a' نظير (مقلوب معاكس) للعنصر $a \in A$ إذا تحقق الشرطين

$a * a' = e \wedge a' * a = e$

ملاحظة:

1) في حال عدم تحقق أحد الشرطين 1) أو 2) قلنا أنّه لا يوجد عنصر نظير في A بالنسبة لـ *

2) في حال عدم وجود عنصر حيادي بالنسبة لـ * في A نقول مباشرةً أنّه لا يوجد عنصر نظير للعنصر $a \in A$ في A بالنسبة لـ *

3) في حال برهان أنّ a' هو نظير العنصر a في $a \in A$ بالنسبة لـ * في A وفي حال كانت * تبديلية على عناصر A نكتفي ببرهان أحد الشرطين 1) و 2).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(4). في حال كانت * عملية الضرب عندئذٍ نرمز لها أحياناً بالرمز · وندعو في هذه الحالة مقلوب العنصر a في A بالنسبة لـ * ونرمز له بالرمز a^{-1} ونكتب بفرض e العنصر الحيادي في A وبالنسبة لـ * حيث

$$a*a^{-1}=e \quad \& \quad a^{-1}*a=e$$

وفي حال كانت * عملية نرمز لها بالرمز + أحياناً وندعو a نظير العنصر a في A بالنسبة للعملية * ونرمز له بالرمز (-a) ونكتب

$a+(-a)=e$ ← العنصر الحيادي

$(-a)+a=e$ ← T لـ a بالنسبة

(5). في حال كانت كلّ من العنصرين a و a' يحققان العلاقة التالية $a*a'=e \wedge a'*a=e$

بفرض e العنصر الحيادي A بالنسبة لـ * قلنا أنّ كلّ من العنصرين a و a' نظير (مقلوب) للآخر A بالنسبة لـ *

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة