كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثالثة

المادة : كهرطيسية

المحاضرة: الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

أمثلة محلولة:

مثال (1): لدينا حقل كهربائي من الشكل $\vec{E} = \frac{E_0 x^2}{a^2}\vec{e}_x - \frac{2E_0}{a^2}(x+y)\vec{e}_z$ بفرض أن $E_y = f(y)$ تابعة فقط للمتحول y ، $\rho = 0$ في كل مكان من الفراغ، والمطلوب:

1) إيجاد المركبة E_y . 2) إيجاد $\vec{B}(t)$ اللازمة للحصول على حقل الحقل الكهربائي. 3) تحديد كثافة تيار الناقلية على فرض كثافة تيار الإزاحة تساوي الصفر. 4) التحقق من صحة العلاقة $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t) = 0$

5) التحقق من أن حقل الحقل الكهربائي $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$ المتولد عن شحنة نقطية يحقق الصفر في أية نقطة من الفراغ

الحل:

1) نعلم أن

$$\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z$$

ومن هنا $E_x = \frac{E_0}{a^2}x^2$ $\quad E_z = -\frac{2E_0}{a^2}(x+y)z$

وطالما أن $\rho = 0$ فإن

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

ومنه أيضاً

$$\frac{2E_0}{a^2}x + \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{2E_0}{a^2}(x+y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{2E_0}{a^2}y$$

$$\Rightarrow E_y = \int \frac{2E_0}{a^2} y\, dy = \frac{E_0}{a^2}y^2$$

2) كي يكون الحقل الكهربائي حلا لـ F يجب أن تتحقق المعادلة

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ ومنه

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_x = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = \left(-\frac{2E_0}{a^2}\zeta - 0\right) = -\frac{2E_0}{a^2}\zeta$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_y = \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = \left(0 + \frac{2E_0}{a^2}\zeta\right) = \frac{2E_0}{a^2}\zeta$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_\zeta = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = (0 - 0) = 0$$

بالتعويض في المعادلة السابقة نجد

$$-\frac{2E_0}{a^2}\zeta \vec{e_x} + \frac{2E_0}{a^2}\zeta \vec{e_y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\vec{e_x} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{e_y}$$

$$B_x = \int \frac{2E_0}{a^2}\zeta \, dt = \frac{2E_0}{a^2}\zeta t$$

$$B_y = \int -\frac{2E_0}{a^2}\zeta \, dt = -\frac{2E_0}{a^2}\zeta t$$

ومنه نحصل على العلاقة النهائية للحقل المغنطيسي المطلوب التي تأخذ الشكل:

$$\vec{B}(t) = B_x \vec{e_x} + B_y \vec{e_y} = \frac{2E_0}{a^2}\zeta t(\vec{e_x} - \vec{e_y})$$

3) حسب معطيات الطلب الثالث نؤول معادلة ماكسويل الأولى إلى الشكل

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$ ومنه:

$$\begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mu_0 \vec{J}$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})_x = \frac{2E_0}{a^2}t \;;\; (\vec{\nabla}\wedge\vec{B})_y = \frac{2E_0}{a^2}t$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})_z = 0$$

$$\vec{J} = \frac{2E_0}{\mu_0 a^2}t\,\vec{e}_x + \frac{2E_0}{\mu_0 a^2}t\,\vec{e}_y \Rightarrow |\vec{J}| = \sqrt{\frac{8E_0^2 t^2}{\mu_0^2 a^4}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,E_0 t}{\mu_0 a^2}$$

4) نلاحظ من الطلب الثاني أن $\vec{B}(t)$ يتعلق بالإحداثية z والزمن t ولا يتعلق بـ x و y، وبالتالي:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0+0+0 = 0$$

5) لدينا من الفرض

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec{\nabla}\wedge\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\frac{\vec{r}}{r^3} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{vmatrix}$$

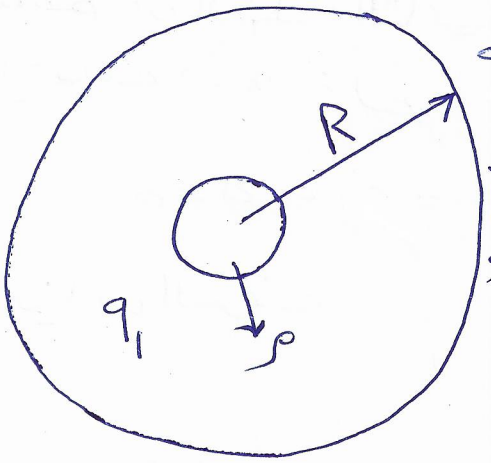
$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0$ بالتعويض والترتيب في معادلة الدوار السابقة نجد

مثال (2): طبق مبرهنة غوص على المعادلة $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ من أجل الحصول على قانون كولون بين شحنتين كهربائيتين

الحل: لحل هذه المسألة نبدأ بإيجاد الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنة النقطية q_1 كما في الشكل المجاور. يمكننا اعتبار الشحنة النقطية حالة حدية لتوزع حجمي للشحنة عندما يؤول الحجم إلى الصفر.

لتكن الشحنة q_1 متوضعة في مركز كرة هيالية، نصف قطرها R ولنحسب الشحنة q_1 من تكامل كثافة الشحنة الحجمية ρ على حجم الكرة.

لنأخذ إذاً التكامل الحجمي لطرفي معادلة مكسويل الآتية:



كرة نصف قطرها R وحجمها V وسطحها S

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,dV = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

ونطبق هنا مبرهنة غوص التي تسمح لنا بالانتقال من التكامل الحجمي إلى التكامل السطحي

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,ds = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

وبفضل تناظر المسألة المدروسة يبقى الضرب السلمي $\vec{E}\cdot\vec{n}$ ثابتاً عند جميع نقاط الكرة التي تحوي الشحنة المدروسة لذا يمكن أن نكتب

$$\vec{E}\cdot\vec{n}\oiint_S ds = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{n}(4\pi R^2) = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

ومنه

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R^3}\vec{R}$$

حيث $\vec{R}$ متجهة العاصمة باتجاه متجه الناظم على السطح الكروي و $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$، تعطى القوة الكهربائية التي تؤثر بها الشحنة q_1 في الشحنة q تقع في جوارها بالعلاقة

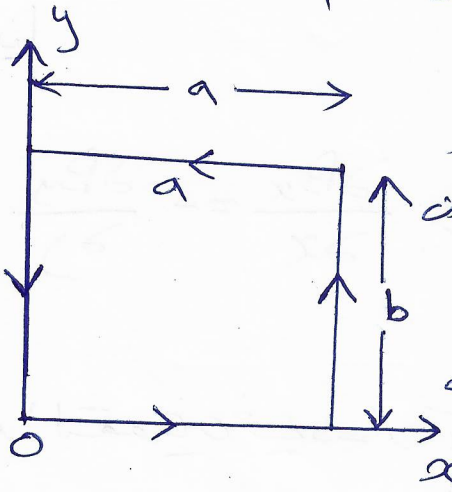
$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{R^3}\vec{R}$$

وهذه العلاقة ليست سوى قانون كولون

مثال (3): لدينا الحقل الكهربائي التالي $\vec{E} = -cy\vec{e}_x + cx\vec{e}_y$

بين فيما إذا كان الحقل $\vec{E}$ محفوظاً أم لا

ثم احسب قيمة الجولان $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}$ على المسار المبين في الشكل المجاور



الحل: أولاً، في الحالة العامة لكي يكون الحقل الكهربائي محفوظاً يجب أن يحقق الشرط $\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=0$ (دوران الحقل الكهربائي يساوي الصفر)

ولكن

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -cy & cx & 0 \end{vmatrix} = 2c\vec{e}_z \neq 0$$

وبالتالي فإن الحقل المعرف غير محفوظ وبالتالي لا يمكن تحديد تابع كمونه

ثانياً: لدينا

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{E})\cdot\vec{n}\,ds$$

$$= \int_S (2c\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_z\,ds = 2cS = 2cab \qquad \vec{e}_z = \vec{n}$$

مثال (4): لدينا حقل احريض مغنطيسي معطى بالعلاقة

$$\vec{B} = B_x(x,y)\vec{e}_x + B_y(x,y)\vec{e}_y$$

والمطلوب

a) أوجد علاقة كثافة التيار $\vec{J}$

b) إذا كانت $J=0$ و $B_x(x,y)=cxy$ حيث c ثابت

أوجد المركبة B_y للحقل $\vec{B}$

الحل: a)

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J} \Rightarrow \vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\wedge\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + \left[\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right]\vec{e}_z$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e_3}$$

b) لدينا

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial y}$$

$$\Rightarrow B_y = -\frac{\partial B_x}{\partial x}\partial y$$

بالتعويض في عبارة كثافة التيار

$$\vec{J} = 0 = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial B_x}{\partial x}\partial y - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e_3}$$

$$J = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y} = cx$$

$$\Rightarrow B_y(x,y) = \int cx\,dy = cxy$$

مكتبة A to Z