كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثالثة

المادة : تحليل عددي

المحاضرة: الثالثة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

حل المعادلات

الحلول العددية لجملة المعادلات غير الخطية:

في الكثير من الدراسات نحصل على معادلة واحدة أو جملة من المعادلات التي تحتاج إلى حل مشترك و قد يتعذر إيجاد الحل الدقيق بالطرق التحليلية المعروفة فنلجأ لإيجاد حل تقريبي باتباع طرق جديدة نذكر منها **طريقة التقريبات المتتالية.**

بفرض:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$
$$f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

جملة معادلات غير خطية و المطلوب إيجاد الحل التقريبي المشترك لها $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ و للتبسيط نأخذ معادلتين غير خطيتين بمجهولين: $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ و المطلوب إيجاد الحل التقريبي $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ بخطأ لا يتجاوز ε، تتلخص طريقة التقريبات المتتالية بالخطوات الآتية:

نعزل من المعادلة الأولى المجهول x بحيث أن $x = F(x,y)$ ، و نعزل من المعادلة الثانية المجهول y بحيث أن $y = G(x,y)$ (علماً أن الخيارات في عزل كل من x و y ليست وحيدة)

نكتب علاقتي التكرار: $y_{n+1} = G(x_n, y_n)$ و $x_{n+1} = F(x_n, y_n)$

تتقارب المتتاليتان الناتجتان من تطبيق علاقتي التكرار إذا تحقق ما يلي:

$\left|F_x\right|_{(x_0,y_0)} + \left|F_y\right|_{(x_0,y_0)} \le k < 1$ و $\left|G_x\right|_{(x_0,y_0)} + \left|G_y\right|_{(x_0,y_0)} \le k < 1$ حيث: $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$ و $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ و $G_x = \frac{\partial G}{\partial x}$ و $G_y = \frac{\partial G}{\partial y}$ و عند تحقق الشرطين السابقين نقول أن الخيار في عزل كل من x و y موفقاً، و نعوض في علاقتي التكرار إلى أن يتحقق الشرط $|z_n - z_{n-1}| < \varepsilon$

فيكون الحل التقريبي المقبول هو $\bar{z} = z_n$

مثال: أوجد بطريقة التقريبات المتتالية حل المعادلتين:

$$x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0$$
$$x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0$$

حيث $z_0 = (x_0, y_0) = (0.5,0.5)$ بخطأ لا يتجاوز 2×10^{-3}

الحل:

نضع $x = \frac{1}{6}(x^3 + y^3) + \frac{1}{2} = F(x,y)$ و $y = \frac{1}{6}(x^3 - y^3) + \frac{1}{3} = G(x,y)$

نجد: $F_x = \frac{x^2}{2}\ , F_y = \frac{y^2}{2}$ و يكون $|F_x|_{(x_0,y_0)} + |F_y|_{(x_0,y_0)} = \frac{0.25}{2} + \frac{0.25}{2} = 0.25 < 1$

$G_x = \frac{x^2}{2}\ , G_y = -\frac{y^2}{2}$ و يكون $|G_x|_{(x_0,y_0)} + |G_y|_{(x_0,y_0)} = \frac{0.25}{2} + \frac{0.25}{2} = 0.25 < 1$

الخيار موفق بالتالي نكتب علاقتي التكرار بالشكل الآتي:

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}({x_n}^3 + {y_n}^3) + \frac{1}{2} \quad و \quad y_{n+1} = \frac{1}{6}({x_n}^3 - {y_n}^3) + \frac{1}{3}$$

فيكون لدينا:

n	x_n	y_n	$\lvert z_n - z_{n-1}\rvert$
1	0.542	0.333	0.173
2	0.533	0.354	0.023
3	0.533	0.351	0.003
4	0.532	0.351	0.001

بما أن $|z_4 - z_3| = 0.001 < \varepsilon$ فإن الحل التقريبي $\bar{z} = z_4 = (0.532,0.351)$

كثيرات الحدود:

بفرض أن $P_n(x) \in \Pi_n$ (حيث Π_n فضاء جميع كثيرات الحدود من الدرجة n على الأكثر)،

عندئذٍ تكتب $P_n(x)$ بالشكل: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

حيث: $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_1, a_0$ معاملات حقيقة ثابتة ، تتمتع كثيرات الحدود بالخواص الآتية:

1. إن أي كثيرة حدود $P_n(x)$ تكتب بالشكل: $(*)\quad P_n(x) = (x-b)Q_{n-1}(x) + R_0$ حيث: $Q_{n-1}(x)$ كثيرة حدود من الدرجة $n-1$ و هي تمثل ناتج قسمة $P_n(x)$ على العامل الخطي $(x-b)$ و $b \in \mathbb{R}$ و R_0 ثابت عددي يمثل باقي قسمة $P_n(x)$ على العامل الخطي $(x-b)$ و هو يساوي بالضبط $R_0 = P_n(b)$ ينتج بوضوح من تعويض $x = b$ في العلاقة $(*)$.
2. إذا كان $x = b$ صفراً لكثيرة الحدود $P_n(x)$ فإن $R_0 = 0$ و بالتالي:

$$P_n(x) = (x-b)Q_{n-1}(x)$$

3. إن لكثيرة الحدود $P_n(x)$: n صفراً على الأكثر و بفرض أن هذه الأصفار هي $b_i; i = \overline{1,n}$ و بتطبيق الخاصة الثانية n مرة متتالية نحصل على:

$$P_n(x) = A(x - b_1)(x - b_2) \dots . (x - b_n)$$

بالمطابقة نجد أن $A = a_n$

4. يوجد كثيرة حدود وحيدة $P_n(x)$ تتطابق مع الدالة $f(x)$ بـ $(n+1)$ من النقاط المختلفة.

جذور كثيرات الحدود (نظرية ديكارت):

إن لكثيرة الحدود $P_n(x)$ عدداً من الجذور الحقيقة الموجبة يساوي عدد التغير الحاصل في إشارات حدود $P_n(x)$ أو ينقص عنه بعدد زوجي.

ملاحظة:

إن لكثيرة الحدود $P_n(x)$ عدداً من الجذور الحقيقة السالبة يساوي عدد التغير الحاصل في إشارات حدود $P_n(-x)$ أو ينقص عنه بعدد زوجي.

مثال: $P(x) = x^2 + x - 7$ عدد الجذور الكلية 2

عدد الجذور الموجبة: 1 لأن الإشارة في متتالية الأمثال $-7, +1, +1$ تغيرت مرة واحدة

لمعرفة عدد الجذور السالبة نوجد $P(-x) = x^2 - x - 7$ عدد الجذور السالبة: 1

مثال: $P(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + x + 2$

متتالية الأمثال: $+1, +1, -4, -3, +1, +2$ عدد الجذور الموجبة: 0 أو 2

$$P(-x) = -x^5 + x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x + 2$$

متتالية الأمثال: $-1, +1, +4, -3, -1, +2$ عدد الجذور السالبة: 1 أو 3

نظرية بودان _ فورييه:

إن عدد الجذور الحقيقية لكثيرة الحدود $P_n(x)$ و الواقعة في المجال $[a, b]$ يعطى بالعلاقة $|V_a - V_b|$ أو ينقص عنه بعدد زوجي حيث:

V_a: عدد التغير الحاصل في الإشارة لمتتالية القيم $P_n(a), \acute{P}_n(a), \dots , {P_n}^{(n)}(a)$

V_b: عدد التغير الحاصل في الإشارة لمتتالية القيم $P_n(b), \acute{P}_n(b), \dots , {P_n}^{(n)}(b)$

مثال: أوجد عدد الجذور الحقيقية في المجال $[-2,2]$ لكثيرة الحدود:

$$P_4(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 1$$

$$P_4(-2) = 16 + 24 + 4 + 10 + 1 = 55$$

$\acute{P}_4(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x - 5$ إذاً: $\acute{P}_4(-2) = -32 - 36 - 4 - 5 = -77$

${P_4}^{(2)}(x) = 12x^2 - 18x + 2$ و منه: ${P_4}^{(2)}(-2) = 48 + 36 + 2 = 86$

$P_4{}^{(3)}(x) = 24x - 18$ و منه: $P_4{}^{(3)}(-2) = -48 - 18 = -66$

$P_4{}^{(4)}(x) = 24$ و منه: $P_4{}^{(4)}(-2) = 24$

لدينا $55, -77, 86, -66, 24$ و بالتالي $V_{-2} = 4$

$$P_4(2) = 16 - 24 + 4 - 10 + 1 = -13$$

$\acute{P}_4(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x - 5$ إذاً: $\acute{P}_4(2) = 32 - 36 + 4 - 5 = -5$

$P_4{}^{(2)}(x) = 12x^2 - 18x + 2$ و منه: $P_4{}^{(2)}(2) = 48 - 36 + 2 = 14$

$P_4{}^{(3)}(x) = 24x - 18$ و منه: $P_4{}^{(3)}(2) = 48 - 18 = 30$

$P_4{}^{(4)}(x) = 24$ و منه: $P_4{}^{(4)}(2) = 24$

لدينا $-13, -5, 14, 30, 24$ و بالتالي $V_2 = 1$

عدد الجذور الحقيقية في المجال $[-2,2]$ هو 1 أو 3

في المثال السابق نجد أنه عند حساب قيمة كثيرة الحدود (أو قيمة أحد مشتقاتها) عند $x = 2$ مثلاً فإننا نقوم بحساب جميع الجداءات $2^4, -3(2^3), 2^2, -5(2)$ و من ثم جمع المقادير الناتجة مع الحد الثابت، يؤخذ على هذه الطريقة أنه يتوجب علينا عند حساب قيمة أي قوة للعدد x أن نمر بجميع القوى السابقة مما يجعل عدد العمليات كبيراً جداً.

طريقة هورنر تغلبت على هذه المشكلة من خلال الحساب بطريقة تعاودية و هي تتلخص بالخطوات الآتية:

نكتب أمثال كثيرة الحدود مرتبة من a_n (في أقصى اليسار) إلى a_0 في صف واحد بحيث نضع 0 مكان الأمثال المعدومة، نترك سطراً فارغاً و تحته خط و على اليسار نكتب قيمة $x = c$

تحت الخط مباشرة أي السطر الثالث نكتب b_n تحت a_n مباشرةً ، ثم نضرب c بالعدد b_n و نضع ناتج الضرب أي cb_n في السطر الفارغ (الثاني) تحت a_{n-1} مباشرةً و نرمز لجمعهما عمودياً b_{n-1} و نضعه تحتهما في السطر الثالث، نكرر هذه العملية حتى نصل إلى b_1 نضربه بالعدد c و نضع ناتج الضرب تحت a_0 مباشرةً فيكون ناتج جمع a_0 مع cb_1 هو b_0 و هو قيمة كثيرة الحدود عند $x = c$

$$\begin{array}{c|ccccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots\dots\dots\dots a_2 & a_1 & a_0 \\ & & cb_n & cb_{n-1} \dots\dots\dots & cb_3 & cb_2 & cb_1 \\ \hline & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} \dots\dots\dots & b_2 & b_1 & \lfloor b_0 = P(c) \end{array}$$

مثال: استخدم طريقة هورنر لحساب قيم كثيرة الحدود $P_5(x)$ عند $x = 3$ حيث:

$$P_5(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40$$

ثم اكتب كثيرة الحدود $P_5(x)$ بالشكل: $P_5(x) = (x-3)Q_4(x) + R_0$.

الحل:

−40	4	8	8	−6	1	
57	15	−3	−9	3		$x = 3$
$P_5(3) = 17$	19	5	−1	−3	1	

و يكون: $P_5(x) = (x-3)(x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x + 19) + 17$

ملاحظة:

بما أن كثيرات الحدود دوال مستمرة و قابلة للاشتقاق نجد أن:

$\acute{P}_n(x) = (x-b)\acute{Q}_{n-1}(x) + Q_{n-1}(x)$ و بالتالي $\acute{P}_n(b) = Q_{n-1}(b)$.

<u>**فمثلاً**</u> إذا كانت $P_4(x) = x^4 - 5x^2 + 4x - 1$ فإنه بإجراء القسمة الإقليدية على $(x-2)$ نجد: $P_4(x) = (x-2)(x^3 + 2x^2 - x + 2) + 3$ و منه يكون $P(2) = 3$ صورة العدد 2 تساوي باقي قسمة $P_4(x)$ على $(x-2)$، و يكون $\acute{P}(2) = 16 = 2^3 + 22^2 - 2 + 2$ صورة العدد 2 وفق المشتق الأول لكثيرة الحدود تساوي صورته وفق ناتج قسمة $P_4(x)$ على $(x-2)$.

و لتعيين قيمة بقية المشتقات يمكننا أن نكتب:

$$P_n(x) = (x-b)Q_1(x) + P_n(b) = P_n(b) + (x-b)[Q_2(x)(x-b) + Q_1(b)]$$
$$P_n(x) = P_n(b) + (x-b)[(x-b)[Q_3(x)(x-b) + Q_2(b)] + Q_1(b)]$$
$$P_n(x) = P_n(b) + (x-b)Q_1(b) + (x-b)^2Q_2(b) + (x-b)^3Q_3(b) + \cdots + (x-b)^nQ_n(b)$$

و باستخدام منشور تايلور لكثيرة الحدود $P_n(x)$ حول $x = b$ نجد أن:

$$P_n(x) = P_n(b) + (x-b)\frac{\acute{P}_1(b)}{1!} + (x-b)^2\frac{\acute{P}_2(b)}{2!} + (x-b)^3\frac{\acute{P}_3(b)}{3!} + \cdots + (x-b)^n\frac{\acute{P}_n(b)}{n!}$$

و بالمطابقة نجد أن: $\frac{\acute{P}_1(b)}{1!} = Q_1(b)$

$\frac{\acute{P}_2(b)}{2!} = Q_2(b)$ و ...... $\frac{\acute{P}_n(b)}{n!} = Q_n(b)$

<u>**تمرين:**</u>

استخدم طريقة هورنر لحساب قيم كثيرة الحدود عند $x = 3$ و حساب قيم جميع مشتقاتها في نفس النقطة حيث $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 7$.

لحساب $P(3)$:

	1	-5	5	5	-7
$x = 3$		3	-6	-3	6
	1	-2	-1	2	-1=P(3)

من الجدول نجد: $P(3) = -1$

لحساب قيمة المشتق الأول عند $x = 3$:

	1	-2	-1	2
$x = 3$		3	3	6
	1	1	2	$8 = \frac{\acute{P}(3)}{1!}$

و بالتالي يكون $\acute{P}(3) = 8$

لحساب قيمة المشتق الثاني عند $x = 3$:

	1	1	2
$x = 3$		3	12
	1	4	$14 = \frac{P^{(2)}(3)}{2!}$

و بالتالي يكون $P^{(2)}(3) = 14 \times 2! = 28$

لحساب قيمة المشتق الثالث عند $x = 3$:

	1	4
$x = 3$		3
	1	$7 = \frac{P^{(3)}(3)}{3!}$

و منه: $P^{(3)}(3) = 7 \times 3! = 7 \times 6 = 42$

لحساب قيمة المشتق الرابع عند $x = 3$:

	1
$x = 3$	
	$1 = \frac{P^{(4)}(3)}{4!}$

و منه: $P^{(4)}(3) = 1 \times 4! = 24$

تمرين:

مستخدماً طريقة نيوتن رافسون أوجد الجذر التقريبي للمعادلة:

$4x^4 + 13x^3 - x + 8 = 0$ و الواقع في المجال $[-4, -3]$ بخطأ لا يتجاوز 2×10^{-3}

علماً أن $x_0 = -3$.

العلاقة التكرارية $x_n = x_{n-1} - \frac{P(x_{n-1})}{\acute{P}(x_{n-1})}$ حيث $n \geq 1$

$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{\acute{P}(x_0)}$ لنوجد قيمتي $P(x_0)$ و $\acute{P}(x_0)$ بطريقة هورنر:

	4	13	0	−1	8
$x = -3$		-12	-3	9	-24
	4	1	-3	8	$-16 = P(-3)$

$P(-3) = -16$

	4	1	-3	8
$x = -3$		-12	33	-90
	4	-11	30	$-82 = \acute{P}(-3)$

$\acute{P}(-3) = -82$

و بالتالي $x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{\acute{P}(x_0)} = -3 - \frac{-16}{-82} = -3.1951$ و منه $|x_1 - x_0| = 0.1951 > \varepsilon$

$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{\acute{P}(x_1)}$ لنوجد قيمتي $P(x_1)$ و $\acute{P}(x_1)$ بطريقة هورنر:

	4	13	0	−1	8
$x = -3.1951$		−12.7804	−0.7016	2.2417	−3.9674
	4	0.2196	−0.7016	1.2417	$4.0326 = P(-3.1951)$

$P(-3.1951) = 4.0326$

	4	0.2196	−0.7016	1.2417
$x = -3.1951$		−12.7804	40.133	−125.9873
	4	−12.5608	39.4314	−124.7456

$\acute{P}(-3.1951) = -124.7456$

و يكون: $x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{\acute{P}(x_1)} = -3.1951 - \frac{4.0326}{-124.7456} = -3.1628$

$|x_2 - x_1| = 0.0323 > \varepsilon$

$x_3 = x_2 - \frac{P(x_2)}{P(x_2)}$ لنوجد قيمتي $P(x_2)$ و $\acute{P}(x_2)$ بطريقة هورنر:

	4	13	0	−1	8
$x = -3.1628$		−12.6512	−1.10318	3.48914	−7.87265
	4	0.3488	−1.10318	2.48914	0.12735 = P(−3.1628)

P(−3.1628) = 0.12735

	4	0.3488	−1.10318	2.48914
$x = -3.1628$		−12.6512	38.91003	−119.5755
	4	−12.3024	37.80685	−117.08636

Ṕ(−3.1628) = −117.08636

و يكون: $x_3 = x_2 - \frac{P(x_2)}{P(x_2)} = -3.1628 - \frac{0.12735}{-117.08636} = -3.16171$

$|x_3 - x_2| = 0.001 < 0.002$ و بالتالي الجذر التقريبي المقبول هو: $x_3 = -3.16171$