كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عقدي ومتجهي

المحاضرة : الثالثة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المعالم المتجهية

لتكن $X \subset \mathbb{R}$ مجموعة متصلة من $\mathbb{R}$ نقول أنه لدينا دالة متجهية $F = f(t)$ على X إذا وجد مقابل كل عدد منتمي $t \in X$ وفق علاقة محددة متجه وحيد $\vec{V} = \vec{V}(t)$

الفرق بين الدالة السلمية والمتجهية:

دالة سلمية $f(x) = w$

$f(x)$ عدد، w عدد

دالة متجهية $f(x)$ [redacted] w

$f(x)$ عدد، w متجه

* نفرض لدينا $\vec{F}$ دالة متجهية معرفة على الفترة $[a,b]$ عندما أجل أي قيمة $t \in [a,b]$ فإن $\vec{F}(t)$ هو متجه يعين بدلالة مركباته $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$

$$\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k} \quad \ldots (1)$$

حيث f_1, f_2, f_3 هي دوال حقيقية (سلمية) كل منها معرف على المجال $[a,b]$

مثال:

$\vec{F}(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}$

$f_1(t) = \frac{1}{t}$ ، $w_1 = \mathbb{R}\{0\}$

$f_2(t) = t$ ، $w_2 = \mathbb{R}$

$f_3(t) = t^2$ ، $w_3 = \mathbb{R}$

مجموعة تعريف الدالة المتجهية $\vec{F}$ هي تقاطع مجالات تعريف:

$w = w_1 \cap w_2 \cap w_3 = \mathbb{R}\{0\}$

$\vec{F}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$ *

$f_1(t) = \cos t$ ، $w_1 [0, 2\pi]$

$f_2(t) = \sin t$ ، $w_2 [0, 2\pi]$

$\vec{F}$ معرفة على $[0, 2\pi]$

$t \in [0, 2\pi]$

تعريف: ليكن $F(t)$ دالة متجهية معرفة على $[a,b]$ و $f_1(t)$ و $f_2(t)$ و $f_3(t)$ مركباتها عندئذٍ من أجل $t \in [a,b]$ فإن طويلة الدالة $\vec{F}(t)$ تعطى بالعلاقة:

$$|\vec{F}(t)| = F(t) = \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t)} \quad \text{...(2)}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$F(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$$

$$F(t) = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{1} = 1$$

العمليات على التوابع المتجهية:

ليكن لدينا دالتين متجهتين:

$$\vec{G}(t) = g_1(t)\,\vec{i} + g_2(t)\,\vec{j} + g_3(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{F}(t) = f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{i} = (f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t))$$

معرفتان على $[a,b]$ ولتكن $h(t)$ دالة سلمية معرفة على $[a,b]$ عندئذٍ نعرف:

(1) $(F \pm G)(t) = \vec{F}(t) \pm \vec{G}(t)$

$$= (f_1(t) \pm g_1(t))\,\vec{i} + (f_2(t) \pm g_2(t))\,\vec{j} + (f_3(t) \pm g_3(t))\,\vec{k}$$

← الناتج هو عبارة عن دالة متجهية.

(2) $(\vec{G}, \vec{F})(t) = \vec{G}(t) \cdot \vec{F}(t)$

$$= g_1(t) \cdot f_1(t) + g_2(t) \cdot f_2(t) + g_3(t) \cdot f_3(t)$$

← الناتج هو عبارة عن دالة سلمية

(3) $(h \cdot \vec{F})(t) = h(t) f_1(t)\,\vec{i} + h(t) f_2(t)\,\vec{j} + h(t) f_3(t)\,\vec{k}$

(سلمية، متجهية)

← الناتج هو عبارة عن دالة متجهية.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(4) $\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = (\vec{F} \wedge \vec{G})(t)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}$$ الناتج دالة متجهية.

* نقول إن الدوال H و G و F الجزئية على الفترة $[a,b]$ مستقلة خطياً إذا كان:

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) \wedge \vec{H}(t) \neq 0$$

أي $(\vec{F}(t), \vec{G}(t), \vec{H}(t)) \neq 0$

نقول أن الدالة $\vec{F}(t)$ تعامد الدالة $\vec{G}(t)$ إذا كان:

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = 0 \quad ; \forall t \in [a,b]$$

مثال: بفرض

$$\vec{F}(t) = t\vec{i} + (1-t)^2\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$$
$$\vec{G}(t) = \sin t\,\vec{i} + \ln t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$$

على المجال $t \in]0, +\infty[$

* $(\vec{F}(t) + \vec{G}(t)) = (f_1(t) + g_1(t))\vec{i} + (f_2(t) + g_2(t))\vec{j} + (f_3(t) + g_3(t))\vec{k}$

$$= (t + \sin t)\vec{i} + ((1-t^2) + \ln t)\vec{j} + (\cos t + t^2)\vec{k}$$

* $\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t) \cdot g_3(t)$

$$= t\sin t + (1-t^2)\ln t + t^2\cos t$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* $\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & 1-t^2 & \cos t \\ \sin t & \ln t & t^2 \end{vmatrix}$

$= [(t^2 - t^4) - \ln t \cos t]\vec{i} - [t^3 - \cos t \sin t]\vec{j} + [t \ln t - (\sin t - \sin t \cdot t^2)]\vec{k}$

* $|\vec{F}(t)| = \sqrt{(t^2) + (1-t^2) + \cos^2 t} = \sqrt{t^4 - t^2 + 1 + \cos^2 t}$

$|\vec{G}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \ln^2 t + t^4}$

* أثبت أن المتجهتين متعامدتين.

$\vec{F}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$

$\vec{G}(t) = b\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}$

$a \neq 0, b \neq 0$ ، $t \in [0, 2\pi]$ معرفة على

$\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = a\cos t \cdot b\cos t + a\sin t \cdot b\sin t$

$= (a.b)\cos^2 t + (a.b)\sin^2 t$

$= (a.b)[\cos^2 t + \sin^2 t] = a.b$

غير متعامدتين.

* $\vec{H}(t) = b\sin t\,\vec{i} - b\cos t\,\vec{j}$

$(\vec{F}.\vec{H})(t) = a.b(\sin t \cos t - \sin t \cos t) = a.b(0) = 0$

$t \in [0, 2\pi]$ متعامدتين من أجل أي قيمة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* نهاية الاستمرار واشتقاق الدوال المتجهية:

النهاية:

$$\lim_{t\to t_0} \vec{F}(t) = \lim_{t\to t_0} f_1(t)\vec{i} + \lim_{t\to t_0} f_2(t)\vec{j} + \lim_{t\to t_0} f_3(t)\vec{k}$$

لا متجه

مثال: $F(t) = (t, 1-t^2, \cos t)$; $t > 0$

$$\lim_{t\to 2} F(t) = \lim_{t\to 2} t\,\vec{i} + \lim_{t\to 2} (1-t^2)\vec{j} + \lim_{t\to 2} \cos t\,\vec{k}$$

$$= 2\vec{i} - 3\vec{j} + \cos 2\,\vec{k}$$

$$\lim_{t\to 2\pi} f(t) = \lim_{t\to 2\pi} t\,\vec{i} + \lim_{t\to 2\pi} (1-t^2)\vec{j} + \lim_{t\to 2\pi} \cos t\,\vec{k}$$

$$= 2\pi\,\vec{i} + (1-4\pi)\vec{j} + 1\,\vec{k}$$

مبرهنة: لتكن $\vec{G}$ و $\vec{F}$ دالتين متجهتين و h دالة سلمية معرفة جميعها على المجال $[a,b]$ وكان

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = \vec{A} \quad , \quad \lim_{t\to t_0} \vec{G}(t) = \vec{B}$$

$$\lim_{t\to t_0} h(t) = m$$

حيث $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متجهان ثابتان و m عدد حقيقي عندئذ:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(a) $\lim_{t \to t_0} [\vec{F}(t) + \vec{G}(t)] = \vec{A} + \vec{B}$

(b) $\lim_{t \to t_0} [\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)] = \vec{A} \cdot \vec{B}$

(c) $\lim_{t \to t_0} [\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t)] = \vec{A} \wedge \vec{B}$

(d) $\lim [h(t) \cdot \vec{F}(t)] = m \cdot \vec{A}$

مثال: $\vec{F}(t, 1-t, 6t^2)$, $\vec{G}(2t^2, \cos t, \frac{1}{t})$

$h(t) = \frac{1}{t^2}$

$t_0 = 1$ $\quad \lim_{t \to 1} F(t) = \lim_{t \to 1} t\,\vec{i} + \lim_{t \to 1} 1-t\,\vec{j} + \lim_{t \to 1} 6t^2\,\vec{k}$

$\lim_{t \to 1} \vec{F}(t) = \vec{i} + 6\vec{k} = \vec{A}$

$\vec{B} = \lim_{t \to 1} \vec{G}(t) = (2, 1, 1)$

$m = \lim_{t \to 1} h(t) = 1$

(a) $\lim [\vec{F}(t) + \vec{G}(t)] = (1, 0, 6) + (2, 1, 1)$

(صفر ← $\vec{F}$ ، صفر ← $\vec{G}$ ، حالة صفرة)

$= (3, 1, 7)$

$= 3\vec{i} + 1\vec{j} + 7\vec{k}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(b) $\lim_{t\to 1} (\vec{F}.\vec{G})(t) = \vec{A}.\vec{B} = (1,0,6).(2,1,1)$

$= 2+0+6 = 8$

الاستمرار: لتكن f دالة متجهية معرفة على $X \subseteq \mathbb{R}$ نقول عن الدالة المتجهية $\vec{F}$ أنها مستمرة في النقطة $t_0 \in X$ إذا كانت:

$$\lim_{t\to t_0} \vec{F}(t) = \vec{F}(t_0)$$

وإذا كانت الدالة مستمرة في كل نقطة من نقاط X فإننا نقول أن الدالة $\vec{F}$ مستمرة على كامل الفترة X

بعبارة أخرى أن الدالة المتجهية تكون مستمرة على مجال تعريفها إذا و فقط إذا كانت مركباتها مستمرة على ذلك المجال.

الاشتقاق:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{F}(t+\Delta t)-\vec{F}(t)}{\Delta t} = f'(t)$$

إذا كانت النهاية السابقة موجودة و محددة تكون الدالة قابلة للاشتقاق ومشتقها $\vec{F}'(t)$ أي إذا كانت المركبات f_2 و f_3 و f_1 قابلة للاشتقاق.

* لإيجاد مشتق الدالة المتجهية $\vec{F}(t)$:

$$\vec{F}'(t) = f_1'(t)\vec{i} + f_2'(t)\vec{j} + f_3'(t)\vec{k}$$

أي مركبات المشتق $F'(t)$ هي $f_3'(t)$ و $f_2'(t)$ ، $f_1'(t)$

مشتقات الدوال f_1, f_2, f_3

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة: نفرض $\vec{F}$ و $\vec{G}$ و $\vec{H}$ دوال متجهية قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ و h دالة سلمية قابلة للاشتقاق على $[a,b]$

عندئذٍ:

(a) $[\vec{F}(t)+\vec{G}(t)]' = \vec{F}'(t)+\vec{G}'(t)$

(b) $[h(t).\vec{F}(t)]' = h'(t).\vec{F}(t)+h(t).\vec{F}'(t)$

(c) $[\vec{F}(t).\vec{G}(t)]' = \vec{F}'(t).\vec{G}(t)+\vec{F}(t).\vec{G}'(t)$

(d) $[\vec{F}(t)\wedge\vec{G}(t)]' = \vec{F}'(t)\wedge\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\wedge\vec{G}'(t)$

(e) $[\vec{F}(t).\vec{G}(t).\vec{H}(t)] = (\vec{F}'(t).\vec{G}(t).\vec{H}(t))+(\vec{F}(t).\vec{G}'(t).\vec{H}(t))+(\vec{F}(t).\vec{G}(t).\vec{H}'(t))$

أ) $(\vec{F}(t).\vec{G}(t)\wedge\vec{H}(t)) = \vec{F}'(t).\vec{G}(t)\wedge\vec{H}(t)+\dots$

نتيجة: لتكن $\vec{F}$ دالة متجهية قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ إن الشرط اللازم والكافي لتكون الدالة $\vec{F}$ ثابتة هو:

$\vec{F}(t).\vec{F}'(t)=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: بفرض:

$\vec{F}(t) = \ln t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{k}$

$\vec{G}(t) = t^2\vec{j} + e^t\vec{k}$

بكل $t>0$، أوجد مشتق $\vec{F}(t).\vec{G}(t)$ بطريقتين.

الحل:

$$(\vec{F}(t).\vec{G}(t))' = \vec{F}'(t)\vec{G}(t) + \vec{F}(t).\vec{G}'(t)$$

$$(\vec{F}(t).\vec{G}(t))' = \ln t\,(0) + t^2(0) + e^t\cos t$$

$$\vec{F}(t).\vec{G}(t) = e^t\cos t$$

$$(\vec{F}(t).\vec{G}(t))' = (e^t\cos t)' = e^t\cos t - e^t\sin t$$

ب:

$$\vec{F}'\left(\frac{1}{t}, 0, -\sin t\right)$$

$$\vec{G}'(0, 2t, e^t)$$

$$\vec{F}'(t).\vec{G}(t) = \left(\frac{1}{t}, 0, -\sin t\right).(0, t^2, e^t)$$

$$= -e^t\sin t$$

$$\vec{F}(t).\vec{G}'(t) = (\ln t, 0, \cos t).(0, 2t, e^t) = e^t\cos t$$

$$(\vec{F}(t).\vec{G}(t))' = \vec{F}'(t).\vec{G}(t) + \vec{F}(t).\vec{G}'(t)$$

$$= -e^t\sin t + e^t\cos t$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\vec{F}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

أثبت أنها ثابتة.

$\vec{F}'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$

$\vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t) = (\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)$

$= -\sin t \cos t + \sin t \cos t = 0$

فالدالة $\vec{F}$ ثابتة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة