كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : الاولى /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التمرين الأول: الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$ (المحور الحقيقي $\mathbb{R}$) والمعرّف عليه دالة المسافة العادية $d(x,y) = |x-y|$

أثبت أنّ هذا الفضاء متري؟

الحل: لنتحقّق من شروط الفضاء المتري:

① $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

وذلك لأنّ $d(x,y) = |x-y| \geq 0$

$d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x-y = 0 \iff x = y$

② $d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x| = d(y,x)$

$\forall x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow$ الشرط الثاني محقق

③ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y|$

حسب خواص القيمة المطلقة فإنّ:

$|x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y|$

$d(x,z) + d(z,y)$

$\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$\Rightarrow$ متراجحة المثلث محققة

بعد مناقشة الشروط ① و ② و ③ نجد أنّ $(\mathbb{R}, d)$ فضاء متري.

التمرين الثاني: بيّن أنّ الفضاء المتري المعرف عليه:

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & ; x=y\\ 1 & ; x\neq y\end{cases}$$

أنّه يحقّق متراً ؟

الحل: • لنتحقق من شروط الفضاء المتري:

① $d(x,y)\geq 0 \quad \forall x,y\in X$

محقّق وضوحاً من التعريف السابق

• $d(x,y)=0 \iff x=y \quad \forall x,y\in X$

② $d(x,y) \overset{?}{=} d(y,x) \quad \forall x,y\in X$

• نراعي حالتين

الحالة (1): إذا كانت: $d(x,y)=0 \Leftarrow x=y$ ، $d(y,x)=0 \Leftarrow y=x$

$\Leftarrow d(x,y)=d(y,x)$

$\Leftarrow$ الحالة (1) محققة

الحالة (2): إذا كانت: $d(x,y)=1 \Leftarrow x\neq y$ ، $d(y,x)=1 \Leftarrow y\neq x$

$\Leftarrow d(x,y)=d(y,x)$

$\Leftarrow$ الحالة (2) محققة

③ $d(x,y) \overset{??}{\leq} d(x,z)+d(z,y) \quad \forall x,y,z\in X$

• نراعي حالتين:

الحالة (1): $x=y \Leftarrow d(x,y)=0 \Leftarrow 0\leq d(x,z)+d(z,y)$

الحالة (1) محققة

الحالة (2): $x\neq y \Leftarrow d(x,y)=1$

$1\leq d(x,z)+d(z,y)$

محققة في جميع الحالات إلّا في حالة:

$d(x,z)=0 \quad \& \quad d(z,y)=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x=z$ & $z=y$ بالتالي:

$x=y$ وهذا مخالف للفرض كون $x \neq y$ وبالتالي متراجحة المثلث محققة دوماً

من تحقق الشروط السابقة نجد أنّ X فضاء متري منقطع (متروك)

التمرين الثالث: إذا كان (X,d) فضاء متري برهن أنّ المتراجحة الآتية صحيحة:

$$d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \dots + d(x_{n-1},x_n)$$

الحل:

بما أنّ d تابع مسافة وبالتالي يحقق متراجحة المثلث من أجل x_1, x_2, x_n:

$$d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_n) \quad (1)$$

ومن أجل x_2, x_3, x_n:

$$d(x_2,x_n) \leq d(x_2,x_3) + d(x_3,x_n) \quad (2)$$

وهكذا من أجل x_{n-2}, x_{n-1}, x_n

$$d(x_{n-2},x_n) \leq d(x_{n-2},x_{n-1}) + d(x_{n-1},x_n) \quad (3)$$

بجمع العلاقات السابقة (1) و (2) و (3) نجد أنّ

$$d(x_1,x_n) + \{d(x_2,x_n) + \dots + d(x_{n-2},x_n)\} \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \dots + d(x_{n-2},x_{n-1}) + \{d(x_2,x_n) + d(x_3,x_n) + \dots + d(x_{n-1},x_n)\}$$

بالاختصار نجد أنّ:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$

وهو المطلوب

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z