كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : الثالثة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

بعض المفاهيم التبولوجيّة:

الكرة والقشرة الكروية: ليكن $X=(X,d)$ فضاءً متريّاً و $x_0 \in X$ و $r \in R^+$ عندئذٍ

1- ندعو المجموعة: $B(x_0,r)=\{x\ ;\ x\in X \wedge d(x,x_0)<r\}$ كرة مفتوحة مركزها x_0 ونصف قطرها r.

2- ندعو المجموعة: $\bar{B}(x_0,r)=\{x\ ;\ x\in X \wedge d(x,x_0)\leq r\}$ كرة مغلقة مركزها x_0 ونصف قطرها r.

3- ندعو المجموعة: $S(x_0,r)=\{x\ ;\ x\in X \wedge d(x,x_0)=r\}$ قشرة كروية مركزها النقطة x_0 ونصف قطرها r.

نتيجة: $S(x_0,r)=\bar{B}(x_0,r)-B(x_0,r)$

الجوار: ليكن $X=(X,d)$ فضاءً متريّاً، ندعو كل كرة مفتوحة مركزها النقطة x_0 ونصف قطرها ε حيث $x_0\in X$ و $\varepsilon>0$ بالجوار ε للنقطة x_0 أو جوار للنقطة x_0.

وندعو أي مجموعة جزئية $A\subset X$ جواراً للنقطة $x_0\in X$ إذا كانت المجموعة A تحوي كرة مفتوحة مركزها النقطة x_0 بغضّ النظر عن نصف قطرها (أي تحوي جواراً للنقطة x_0).

تعريف المجموعة المفتوحة و المجموعة المغلقة:

ندعو المجموعة الجزئية M من الفضاء المتري $X=(X,d)$ مجموعة مفتوحة إذا كان من أجل كل نقطة x من نقط المجموعة M يوجد

كرة مفتوحة مركزها هذه النقطة (جواراً لهذه النقطة) محتوى بأكمله في المجموعة M.

ونقول $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة إذا كانت متممتها $\bar{F}$ مجموعة مفتوحة

$M \subseteq X$; M مجموعة مفتوحة في $X \Leftrightarrow$

$\exists x \in M$; $\exists B(x,\varepsilon)$; $B(x,\varepsilon) \subset M$

محتوى بأكمله

$F \subseteq X$; F مغلقة في $X \Leftrightarrow$ $\bar{F}$ مجموعة مفتوحة في X

• تعريف النقطة الداخلية:

إذا كان $X=(X,d)$ فضاءً متريّاً وكانت A مجموعة جزئية من X أي $A \subseteq X$ و $x_0 \in X$ نقول x_0 نقطة داخلية للمجموعة A إذا كانت المجموعة A جواراً للنقطة x_0 أو المجموعة A تحوي جواراً مركزه النقطة x_0 وهذا الجوار بأكمله محتوى في A

ونرمز عادةً لمجموعة جميع النقط الداخلية للمجموعة A بالرمز A°

ينتج من التعريف السابق:

1. $x_0 \in A$ لأنّ x_0 نقطة داخلية لـ A
2. A° مجموعة مفتوحة وهي أكبر مجموعة مفتوحة في A

• تعريف نقطة التراكم (نقطة مدية / نقطة تجمّع) والنقطة اللاصقة لمجموعة ما:

ليكن $X=(X,d)$ فضاءً متريّاً و $M \subseteq X=(X,d)$ مجموعة جزئية من الفضاء X:

1. نقول النقطة $x_0 \in X$ (قد تنتمي لـ M وقد لا تنتمي) نقطة تراكم للمجموعة M إذا كان كل جوار للنقطة x_0 يحوي نقطة واحدة على الأقل y من M مغايرة لـ x_0 أي:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall r>0 \quad ; \quad B(x_0, r) \cap M - \{x_0\} \neq \phi$

أي أنّ أي جوار للنقطة x_0 يحوي عدداً غير منتهٍ من نقط المجموعة M.

2 - نقول عن النقطة $x' \in M$ نقطة لاصقة للمجموعة M إذا كان كل جوار للنقطة x' يحوي نقطة واحدة على الأقل y من M (أي تقاطعه مع M لا يساوي الخالية) وبشكل رياضي نكتب:

$\forall r>0 \quad ; \quad B(x', r) \cap M \neq \phi$

• نرمز عادة "لمجموعة جميع نقط التراكم للمجموعة M بالرمز M' ونسميها المجموعة المشتقة حيث:

x_0 كنقطة تراكم يمكن أن تنتمي للمجموعة M ويمكن أن لا تنتمي و

نرمز عادة "لمجموعة جميع النقط اللاصقة للمجموعة M بالرمز $\bar{M}$

ونسميها لصاقة M حيث $\bar{M} = M \cup M'$.

نتيجة: M مجموعة مغلقة في X و X فضاء متري و $M \subseteq X$

إذا وفقط إذا كانت $M = \bar{M}$.

• نتذكر دوماً أنّ الفضاءات التبولوجيّة هي التّعميم للفضاءات المترية

المتتاليات في الفضاءات المترية:

تعريف: المتتالية في الفضاء المتري X: ليكن $X = (X, d)$ فضاءً متريّاً

و $u : \mathbb{N} \to X$ دالة معرّفة بالشكل التّالي:

$u : n \to u(n) = x_n \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$ أي $\forall n \in \mathbb{N}$

عندئذٍ نسمي مجموعة قيم الدالة u وهي:

$\{u(1), u(2), \ldots, u(n), \ldots\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

متتالية من نقط الفضاء المتري X ونسمي $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

حدود هذه المتتالية و x_1 حدّها الأول و x_n حدّها العام

ونرمز لها عادة "بالرمز $(x_n)_{n\geq 1}$ أو $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: في الفضاء المتري $X=\mathbb{R}^3$ فإنّ

$$\left[(x_n^1, x_n^2, x_n^3)\right]_{n\geq 1} = \left[\left(\frac{1}{n+1}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, e^{-n^2}\right)\right]_{n\geq 1}$$

متتالية في الفضاء المتري $\mathbb{R}^3$.

- تعريف المتتالية المتقاربة في الفضاء المتري X:

نقول عن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ من نقط الفضاء المتري $X=(X,d)$ أنّها متقاربة إلى النقطة x_0 من هذا الفضاء (أي $x_0\in X$) إذا تحقّق الشرط التّالي:

(I) $\forall \varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \;;\; \forall n\geq N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x_0)<\varepsilon$

ونكتب في هذه الحالة $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ونعني $x_0\in X$ نهاية المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$.

أمّا إذا لم يتحقق هذا الشرط نقول عن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ أنّها متتالية متباعدة في الفضاء X.

- بعض الملاحظات والنّتائج:

1- إذا طبقنا شرط المتتالية المتقاربة (I) على الفضاء المتري الحقيقي العادي نحصل على شرط التقارب في $\mathbb{R}$ وهو:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon)=N_\varepsilon\in\mathbb{N} \;;\; \forall n\geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_0|<\varepsilon$$

وهو شرط التقارب للمتتاليات العددية الحقيقية.

(وظيفة): طبّق شرط التقارب في كل من الفضاءات المترية $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}$ و $C[a,b]$ و ℓ^∞ و ℓ^p و $B(A)$.

2- إنّ تحقّق الشرط (I) $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0)=0$

مثال:

المتتالية التي حدّها العام: $x_n=\left(\frac{1}{n+1}, e^{-n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

هي متتالية من نقط الفضاء المتري $X=\mathbb{R}^3$ وهي متقاربة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عن النقطة $(0,0,e)$ لأنّه $(0,0,e) \in \mathbb{R}^3$.

$$d(x_n, x^\circ) = d\left(\left(\frac{1}{n+1}, e^{-n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right), (0,0,e)\right) =$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{n+1}-0\right)^2 + \left(e^{-n}-0\right)^2 + \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

3- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \iff$ إذا تحقّق الشرط I $\iff$ أي كرة مفتوحة مركزها النقطة x_0 ونصف قطرها ε أي $B(x_0, \varepsilon)$ تحوي جميع حدود هذه المتتالية باستثناء عدد منتهٍ منها.

أي إذا كانت المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة من النقطة x_0 في الفضاء المتري X فإنّها تحقق الشرط (I) وبالتالي فإنّ جميع حدودها تكون محتواة في جوار مركزه النقطة x_0 (أي كرة مفتوحة مركزها x_0 ونصف قطرها ε وهي $B(x_0, \varepsilon)$ باستثناء عدد منتهٍ من حدود هذه المتتالية).

4- إذا كانت $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية من نقط الفضاء المتري $X=(X,d)$ وكانت هذه المتتالية غير متقاربة إلى أي نقطة من هذا الفضاء أو متقاربة إلى نقطة $x_0 \notin X$ عندئذٍ نقول إنّ هذه المتتالية متباعدة في هذا الفضاء واقتصاراً متتالية متباعدة وبالتالي تقارب متتالية ما يتعلق بطبيعة هذه المتتالية والفضاء المتري معاً.

مثال: إذا أخذنا الفضاء المتري $(X,d) = (\mathbb{Q}, |\cdot|)$ وأخذنا فيه المتتالية التي حدّها العام $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ و $n=1,2,\dots$ من نقط هذا الفضاء فإنّ:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \notin \mathbb{Q}$$

وبالتالي هذه المتتالية متقاربة إلى نقطة e لا تنتمي إلى الفضاء

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

Q إذاً المتتالية متباعدة في هذا الفضاء

5- إذا كانت $(X_n)_{n\geq 1}$ متتالية من نقط الفضاء المتري $X=(X,d)$ وكانت هذه المتتالية متقاربة في هذا الفضاء عندئذٍ ليس من الضروري أن تكون متقاربة في كل فضاء متري جزئي من الفضاء X

مثال: المتتالية التي حدّها العام $X_n=\frac{1}{n}$ ؛ $n=1,2,\dots$ هي متتالية من نقط الفضاء المتري الحقيقي $(\mathbb{R},|.|)$ حيث حدودها هي $\{\dots,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\}$ وهي متقاربة من النقطة $x_0=0\in\mathbb{R}$ في هذا الفضاء

ولكن من جهة أخرى فإنّ هذه المتتالية:

$(X_n)_{n\geq 1}=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}\subseteq]0,1[$

هي متتالية من نقط الفضاء المتري $(]0,1[,|.|)$ وهو فضاء متري جزئي من الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$

حيث $0\notin]0,1[$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ فهي متتالية متباعدة في الفضاء $(]0,1[,|.|)$.

• تعريف المتتالية المحدودة:

نقول عن المتتالية $(X_n)_{n\geq 1}$ من نقط الفضاء المتري $X=(X,d)$ أنّها محدودة إذا كان بالإمكان حصر جميع حدودها في كرة مفتوحة (أو مغلقة) في هذا الفضاء.

مثال: المتتالية التي حدّها العام $x_n=\frac{1}{n}$ ؛ $n=1,2,\dots$ من نقط الفضاء المتري الحقيقي $\mathbb{R}$ هي متتالية محدودة لأنّه بالإمكان إيجاد كرة مفتوحة مركزها 0 ونصف قطرها 1 تحوي جميع حدود هذه المتتالية أي يمكن حصر جميع حدود هذه المتتالية في الكرة المفتوحة $B(0,1)=B(x_0,r)$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z