كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : الثانية /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تقريبات تشبيشيف في الحالة المتقطعة

لتكن $x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi$ حيث $k = 0, 1, \dots, n$ أصفاراً للحدودية $T_{n+1}(x)$ وهي أعداد حقيقية متناظرة من المجال $[-1, 1]$

نحسب قيم الدالة من هذه الأصفار $y_k = f(x_k)$ فيصبح لدينا:

$\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$ والمطلوب إيجاد كثيرة حدود

تشبيشيف $p_m(x)$

$$p_m(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \dots + a_m T_m(x)$$

بحيث تتحقق العبارة: $m < n$;

$$\|f - p_m\|_2^2 = \min_{a_0, \dots, a_m} \sum_{k=0}^{n} (y_k - p_m(x_k))^2$$

ليس بالضرورة أن يمر $p_m(x)$ من جميع النقاط

أما من أجل $m = n$ فكثيرة الحدود $p_m(x)$ ستمر من جميع النقاط وتصبح

مسألة استيفاء

$$E(a_0, \dots, a_m) = \sum_{k=0}^{n} (y_k - p_m(x_k))^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0$$

$$-2 \sum_{k=0}^{n} (y_k - p_m(x_k)) T_i(x_k) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} y_k T_i(x_k) - \sum_{k=0}^{n} p_m(x_k) T_i(x_k) = 0$$

بسبب خاصة التعامد

$$\sum_{k=0}^{n} y_k T_i(x_k) - a_i \sum_{k=0}^{n} T_i(x_k) T_i(x_k) = 0$$

$$a_i = \frac{\sum_{k=0}^{n} y_k T_i(x_k)}{\sum_{k=0}^{n} T_i^2(x_k)} \quad ; \quad i = 0, \dots, m$$

$$a_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} y_k \qquad i = j = 0$$

TEL:0931497960 - مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس)

$$a_i = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} y_k T_i(x_k) \quad ; i = 1, \dots, m \qquad i = j \neq 0$$

مثال: لتكن الدالة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ معرفة ومستمرة في المجال $[-1,1]$

والمطلوب: أوجد كثيرة حدود تشيبشيف $p_2(x)$ أوجد باستخدام أربع أصفار.

الحل:

$T_4(x) \Rightarrow n+1 = 4 \Rightarrow n = 3$, $k = 0, 1, 2, 3$

$p_2(x) \Rightarrow m = 2$

نحسب الأصفار وفق القانون $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{8}\pi\right)$

وهي أصفار متناظرة على المجال $[-1,1]$

$k = 0 \Rightarrow x_0 = \cos\frac{\pi}{8} \simeq 0.92387$

$k = 1 \Rightarrow x_1 = \cos\frac{3\pi}{8} \simeq 0.38268$

$k = 2 \Rightarrow x_2 = \cos\frac{5\pi}{8} \simeq -0.38268$

$k = 3 \Rightarrow x_3 = \cos\frac{7\pi}{8} \simeq -0.92387$

$y_k = f(x_k) = \frac{1}{1+x_k^2} \Rightarrow$

$y_0 \simeq 0.53950 = f(x_0)$

$y_1 \simeq 0.87226 = f(x_1)$

$y_2 \simeq 0.87226 = f(x_2)$

$y_3 \simeq 0.53950 = f(x_3)$

$p_2(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x)$

$$a_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{3} y_k = \frac{1}{4}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) \simeq 0.70588$$

$$a_1 = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{3} \frac{x_k}{1+x_k^2} = 0$$ بسبب التناظر

$$a_2 = \frac{2}{4} \sum_{k=0}^{3} y_k T_2(x_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{3} \frac{2x_k^2 - 1}{1+x_k^2} \simeq -0.23529$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$p_2(x) \simeq 0.70588 - 0.23529(2x^2-1)$$

$$p_2(x) \simeq 0.94117 - 0.47058x^2$$

طلب إضافي: احسب قيمة تقريبية للدالة f عند $x=0$، واحسب الخطأ المطلق عند $x=0$.

الحل: القيمة التقريبية عند $x=0$ هي $p_2(0) \simeq 0.94117$

الخطأ المطلق $\delta = |p_2(0) - f(0)| = |0.94117 - 1| = 0.05883$

مثال: ليكن لدينا $f(t) = \frac{1}{t^2-2t+2}$ من المجال $[0,2]$، والمطلوب: أوجد تقريب تشيبيشيف $p_2(t)$ من الدالة المتصلة فوق المجال $[0,2]$ باستخدام $T_5(t)$.

الحل: $m=2$ ، $n+1=5 \Rightarrow n=4$ ، $k=0,1,2,3,4$

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} \Rightarrow t = x+1$$

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2-2(x+1)+2} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{10}\pi\right)$$

$x_0 \simeq 0.95105$ ، $x_1 \simeq 0.58778$ ، $x_2 = 0$

$x_3 \simeq -0.58778$ ، $x_4 \simeq -0.95105$

نجد: $y_k = f(x_k)$: $y_0 \simeq 0.52507$ ، $y_1 \simeq 0.74322$

$y_2 = 1$ ، $y_3 = 0.74322$ ، $y_4 \simeq 0.52507$

$$a_0 = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} y_k \simeq 0.70731$$

$$a_1 = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} \frac{x_k}{1+x_k^2} = 0$$

$$a_2 = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} \frac{2x_k^2-1}{1+x_k^2} \simeq -0.24391$$

$$p_2(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x)$$

$$p_2(x) \simeq 0.70731 - 0.24391(2x^2-1)$$

$$p_2(x) \simeq 0.95122 - 0.48782x^2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$p_2(t) \simeq 0.95122 - 0.48782\,(t-1)^2$

طلب إضافي: احسب قيمة تقريبية عند $t=1$، واحسب الخطأ المطلق عند $t=1$.

الحل $p_2(1) \simeq 0.95121$ ، $\delta|p_2(1) - f(1)| \simeq 0.04879$

وظيفة: أوجد تقريبات تشبيشيف الخطية والتربيعية في أصفار $T_5(x)$ للدالة $f(x) = \cos x$ في المجال $[-1,1]$.

الاستيفاء الشرائحي الخطي

لقد وجدنا عند استيفاء دالة معلومة بـ $n+1$ من النقاط المختلفة بكثيرة حدود فإن كثيرة الحدود من الدرجة m، والمشكلة أنه عندما يكون عدد النقاط كبير فسنحصل على كثيرة حدود من درجة عالية كتقريب للدالة، ولكن هذه الكثيرة حدود لا تعبّر بشكل مرضٍ عن التقريب ولحل هذه المشكلة تم استخدام الاستيفاء الشرائحي.

يعرف الاستيفاء الشرائحي فوق المجال $[a,b]$ على أنه تجزئة للمجال الأساسي إلى عدة مجالات جزئية متتالية وإيجاد كثيرة حدود تدعى (شريحة) فوق كل مجال جزئي على حدى.

أما الاستيفاء الشرائحي الخطي نعرفه كالآتي:

نجزأ المجال $[a,b]$ الذي يوافق $[x_0, x_n]$

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots\dots < x_{n-1} < x_n$$

فتكون لدينا المجالات الجزئية:

$$[x_0, x_1]\ ,\ [x_1, x_2]\ ,\ \dots\dots\ ,\ [x_i, x_{i+1}]\ ,\ \dots\dots\ ,\ [x_{n-2}, x_{n-1}]\ ,\ [x_{n-1}, x_n]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

x_i عقد الاستيفاء

$$S(x)=\begin{cases} S_1(x) \; ; \; x\in[x_0,x_1] \\ S_2(x) \; ; \; x\in[x_1,x_2] \\ \vdots \\ S_i(x) \\ \vdots \\ S_n(x) \; ; \; x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

حيث $S_i(x)$ من $i=1,\dots,n$ و هي كثيرات حدود خطية

يمكن إيجاد هذه الحدود بـ طريقة لاغرانج بوجود النقاط

(x_0,f_0) و (x_1,f_1)

$$S_1(x)=L_0(x)f_0+L_1(x)f_1 \qquad L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}$$

$$S_{i+1}(x)=L_i(x)f_i+L_{i+1}(x)f_{i+1} \qquad L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

(x_i,f_i) , (x_{i+1},f_{i+1})

$$S_i(x_i)=S_{i+1}(x_i) \qquad L_i(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}$$

مثال أوجد الاستيفاء الثلاثي الخطي للدالة المعرفة بالجدول:

x_i	-1	0	1	2
y_i	-2	0	1	3

الحل

$$S(x)=\begin{cases} S_1(x) \; ; \; x\in[-1,0] \\ S_2(x) \; ; \; x\in[0,1] \\ S_3(x) \; ; \; x\in[1,2] \end{cases}$$

$$S_1(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1$$

$$=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}(-2)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}(0)=2x$$

$$S_2(x)=L_1(x)y_1+L_2(x)y_2$$

$$=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}(0)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(1)=x$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$S_3(x) = L_2(x)\,y_2 + L_3(x)\,y_3$$

$$= \frac{x-x_3}{x_2-x_3}(1) + \frac{x-x_2}{x_3-x_2}(3) = 2x-1$$

$$S(x) = \begin{cases} 2x & ; x \in [-1,0] \\ x & ; x \in [0,1] \\ 2x-1 & ; x \in [1,2] \end{cases}$$

طلب إضافي: أوجد تقريب الدالة عند $x = 1.5$

$$S_3(1.5) = 2(1.5) - 1 = 2$$

وظيفة: أوجد التقريب السرائحي الخطي للدالة $f(x) = \sin x$ باستخدام العقد $x_i = -2 + i$ حيث $i = 0,1,2,3$ واحسب قيمة تقريبية للدالة عند $x = 1$ وأوجد الخطأ المطلق عندها.

الاستيفاء هيرميت التكعيبي

هو تقريب دالة $f(x)$ في المجال $[a,b]$ لكثيرة حدود من الدرجة الثالثة نرمز لها $H_3(x)$ وهي كثيرة حدود تطابق مع الدالة $f(x)$ ومشتقاتها الأولى في النقطتين x_0 و x_1 تنتميان إلى المجال $[a,b]$ حيث $x_0 \neq x_1$ (نقطتان مختلفتان) وتحقق شروط الاستيفاء التالية: شروط استيفاء هيرميت:

$$(1)\begin{cases} H_3(x_k) = f(x_k) & ; k = 0,1 \\ H_3'(x_k) = f'(x_k) & ; k = 0,1 \end{cases}$$

تكتب كثيرة حدود هيرميت التكعيبية بالشكل:

$$(2)\quad H_3(x) = \sum_{j=0}^{1} S_j(x) f_j + \sum_{j=0}^{1} R_j(x) f_j'$$

حيث $S_j(x)$ و $R_j(x)$ كثيرات حدود من الدرجة الثالثة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$S_j(x) = [1 - 2(x - x_j) L'_j(x_j)] L_j^2(x)$$

$$R_j(x) = (x - x_j) L_j^2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad , \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

إن S_j و R_j تحققان الخواص التالية:

(3)
$$\forall j,k \qquad S_j(x_k) = \begin{cases} 1 & ; j = k \\ 0 & ; j \neq k \end{cases} \qquad S'_j(x_k) = 0$$

$$R_j(x_k) = 0 \quad , \quad R'_j(x_k) = \begin{cases} 1 & ; j = k \\ 0 & ; j \neq k \end{cases} \qquad \forall j,k$$

كثيرة الحدود (2) تحقق شروط الاستيفاء (1)

حسب (3)

$$H_3(x_k) = \sum S_j(x_k) f_j + \sum R_j(x_k) f'_j = S_k f_k = 1 \cdot f_k = f(x_k)$$

$$H'_3(x_k) = \sum S'_j(x_k) f_j + \sum R'_j(x_k) f'_j = 0 + 1 \cdot f'_k = f'(x_k)$$

بما أن هذا الإثبات محقق فإن كثيرة الحدود (2) وحيدة.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة