كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : **الخامسة** /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

3

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

11 ليكن $D=\{a+b\sqrt{5}i \ ; \ a,b\in\mathbb{Z}\}$
حلقة جزئية في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ والمطلوب:
أثبت أن: $I=\{a+b\sqrt{5}i \ ; \ a,b\in\mathbb{Z} \ \& \ a-b\in 2\mathbb{Z}\}$
إيديال في الحلقة D.

الحل

1) $\forall x,y\in I \overset{?}{\Rightarrow} x-y\in I$

$\Rightarrow x=a_1+b_1\sqrt{5}i \ ; \ a_1,b_1\in\mathbb{Z} \ , \ a_1-b_1\in 2\mathbb{Z}$

$\Rightarrow y=a_2+b_2\sqrt{5}i \ ; \ a_2,b_2\in\mathbb{Z} \ , \ a_2-b_2\in 2\mathbb{Z}$

$x-y=(a_1+b_1\sqrt{5})-(a_2+b_2\sqrt{5})$

$=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{5}$

$a_1-a_2\in\mathbb{Z} \ , \ b_1-b_2\in\mathbb{Z}$ و

$(a_1-a_2)-(b_1-b_2)=(a_1-b_1)-(a_2-b_2)\in 2\mathbb{Z}$ & $2\mathbb{Z}\Rightarrow$ $2\mathbb{Z}\Rightarrow$

بالتالي $x-y\in I$

2) $\forall r\in D \ \& \ x\in I \overset{?}{\Rightarrow} rx\in I$

$\Rightarrow r=a+b\sqrt{5}i \ ; \ a,b\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x=c+d\sqrt{5}i \ ; \ c,d\in\mathbb{Z} \ , \ c-d\in 2\mathbb{Z}$

$rx=(a+b\sqrt{5}i)(c+d\sqrt{5}i)$

$=(ac-5bd)+(cb+ad)\sqrt{5}i$

$ac-5bd\in\mathbb{Z} \ , \ cb+ad\in\mathbb{Z}$ و

$\phi \quad (ac - 5bd) - (cb + ad) = a(c - d) - bc - 5bd$

$= a(c - d) - bc + bd - bd - 5bd$

$= a(c - d) - (c - d)b - 6bd \in 2\mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z} \Rightarrow \quad 2\mathbb{Z} \Rightarrow \quad 2\mathbb{Z} \Rightarrow$

بالتالي $rx \in I$

مما سبق نجد أن I إيديال في الحلقة D.

2 لتكن لدينا المجموعة: $D = \{ a + b\sqrt{3} \ ; \ a, b \in \mathbb{Z} \}$

① أثبت أن D حلقة جزئية في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

② أثبت أن D ليس إيديال في $\mathbb{R}$.

الحل ①

1) $\forall x, y \in D \xrightarrow{?} x - y \in D$ $\qquad \phi \neq D \subset \mathbb{R}$

$\Rightarrow x = a + b\sqrt{3} \ ; \ a, b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y = c + d\sqrt{3} \ ; \ c, d \in \mathbb{Z}$

$x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{3} \in D$

$\mathbb{Z} \Rightarrow \quad \mathbb{Z} \Rightarrow$

2) $\forall x, y \in D \xrightarrow{?} xy \in D$

$\Rightarrow x = a + b\sqrt{3} \ ; \ a, b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y = c + d\sqrt{3} \ ; \ c, d \in \mathbb{Z}$

$xy = (ac + 3bd) + (ad + cb)\sqrt{3} \in D$

$\mathbb{Z} \Rightarrow \quad \mathbb{Z} \Rightarrow$

مما سبق نجد أن D حلقة جزئية في $\mathbb{R}$.

② لدينا $x = 2 + 5\sqrt{3} \in D \ , \ r = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

$rx = 1 + \frac{5}{2}\sqrt{3} \notin D$ $\qquad$ لأن $\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بالتالي D ليس إيديال في $\mathbb{R}$.

3. $D=\{a+b\sqrt{3}\,i \;;\; a,b\in\mathbb{Z}\}$

حلقة جزئية في $\mathbb{C}$ (مجموعة الأعداد العقدية) والمطلوب:

أثبت أن العدد $x=2$ عنصر غير قابل للاختزال في D.

الحل ① $x=2$ عنصر غير قابل للقلب في D

نفرض جدلاً بأن $x=2$ عنصر قابل للقلب في D عندئذ

$\exists\, y\neq 0\in D \;;\; y=a+b\sqrt{3}\,i \;:\; xy=1$

$a,b\in\mathbb{Z}$ ؛

$2(a+b\sqrt{3}\,i)=1$

$2a+2b\sqrt{3}\,i=1 \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$

فالفرض الجدلي خاطئ و $x=2$ عنصر غير قابل للقلب في D

② لنفرض بأن $x_1,x_2\in D$ ؛ $2=x_1x_2$

$x_1=a+b\sqrt{3}\,i$ ؛ $a,b\in\mathbb{Z}$

$x_2=c+d\sqrt{3}\,i$ ؛ $c,d\in\mathbb{Z}$

$2=(a+b\sqrt{3}\,i)(c+d\sqrt{3}\,i)$

$2=(a-b\sqrt{3}\,i)(c-d\sqrt{3}\,i)$

$4=(a^2+3b^2)(c^2+3d^2)$

الحالة الأولى: $a^2+3b^2=2$ & $c^2+3d^2=2$

هاتان المعادلتان غير قابلتان للحل في $\mathbb{Z}$

الحالة الثانية: $a^2+3b^2=1$ & $c^2+3d^2=4$

$x_1=a+b\sqrt{3}\,i=\begin{cases}1\\-1\end{cases}$ بالتالي x_1 قابل للقلب في D.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحالة الثالثة : $c^2+3d^2=1$ و $a^2+3b^2=4$

$x_2 = c+d\sqrt{3}\,i = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$

بالتالي x_2 قابل للقلب في D

نستنتج مما سبق أن $x=2$ عنصر قابل للاختزال في D .

انتهت المحاضرة

مكتبة A to Z