كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي١

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المجال العقدية :

نقول أنّه في المنطقة (المجال) D يتم تعريف الدالة $w=f(z)$ إذا كان من أجل كل نقطة $z \in D$ تعين قيمة واحدة (دالة أحادية القيمة) أو عدة قيم (دالة متعددة القيم) من w

$$f: Dc \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$w = f(z) \; ; \; z \in D$$

بالتالي فإنّ $w=f(z)$ هي علاقة رياضية تنقل نقاط المستوي العقدي z إلى نقاط المستوي العقدي w

لنفرض $z = x + iy$,

$$w = u + iv$$

$$w = f(z)$$

$x \quad y$

العلاقة $w=f(z)$ بين الدالة w والمتغير z يمكن تمثيلها من خلال العلاقة بين اثنين حقيقيين u, v وبمتغيرين حقيقيين x, y

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

مثال: ليكن $w = z^3 - i\bar{z}$ لنعرف $z = x + iy$ حيث $x, y \in \mathbb{R}$

و $w = u + iv$

$$w = (x+iy)^3 - i(x-iy)$$

$$= x^3 + 3x^2(iy) + 3(-y^2)x + (-iy^3) - ix - y$$

$$w = \underbrace{x^3 - 3xy^2 - y}_{u} + i\underbrace{(3x^2y - y^3 - x)}_{v}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - y$$

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 - x$$

مثال 2: أوجد القسم الحقيقي والتخيلي للدالة $w = \frac{\bar{z}}{z}$

نضع $z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

$$w = \frac{(x-iy)}{(x+iy)}$$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام:

$$w = \frac{(x-iy)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2xiy}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - i\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{-2xy}{x^2+y^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: للبيت:

(1) $w = \frac{iz+1}{1+z}$

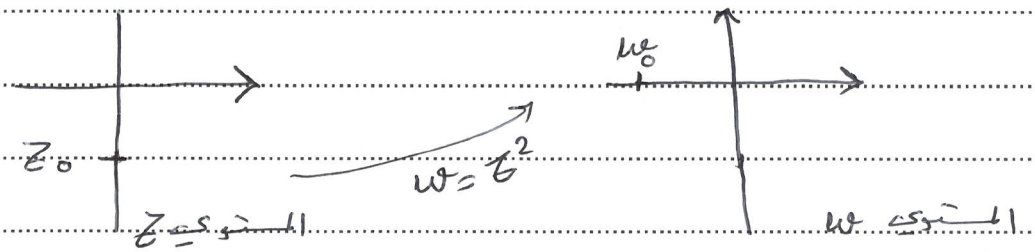
(2) $w = \bar{z} - i z^2$

(3) $w = z^2 + i$

(4) $w = i - z^3$

(5) $w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x+iy}{x^2+y}$

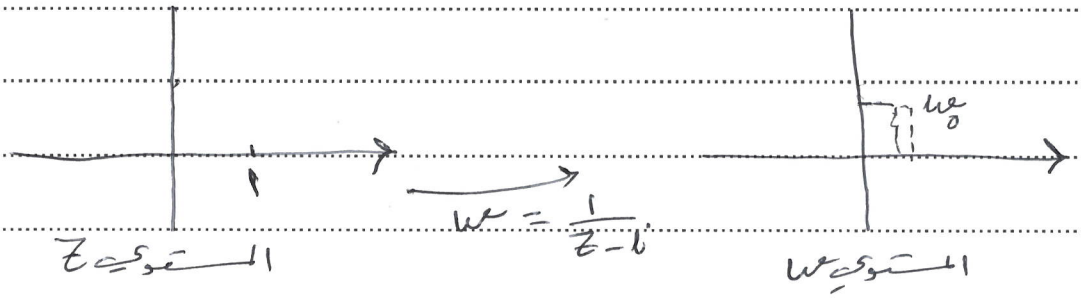
* أوجد صورة النقطة $z_0 = -i$ بواسطة الدالة $w = z^2$



$f(z_0) = w_0 = (-i)^2 = -1$

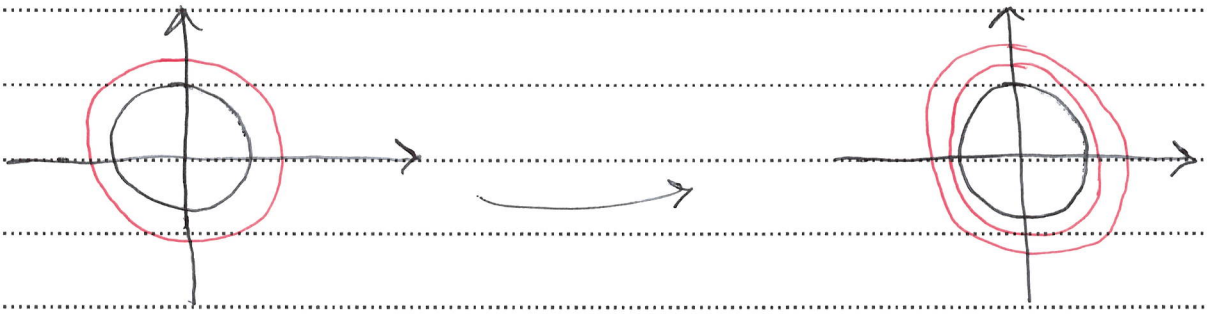
مثال: $z_0 = 1$ وفق $w = \frac{1}{z-i}$

$w_0 = \frac{1}{z_0 - i} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* أوجد صورة دائرة الواحدة $|z|=1$ وفق الدالة $w=z^2$



$w=z^2 \Rightarrow |w|=|z^2|=|z|^2=1$

$|w|=1$ ، $z=|z|e^{i\theta}=e^{i\theta}$

$w=(e^{i\theta})^2=e^{i2\theta}$

صورة دائرة الواحدة $|z|=1$ وفق $w=z^2$ هي دائرة الواحدة $|w|=1$ مع اختلاف أنه إذا دار z دورة واحدة فإن w تكون قد دارت مرتين في المستوى w

مثال: أوجد صورة الدالة $z=R\cos t+iR\sin t$ حيث $0<t\leq 2\pi$ بواسطة الدالة $w=\frac{z}{\bar{z}}$

$z=x+iy \Rightarrow x=R\cos\theta$

$y=R\sin t$

$w=u+iv=\frac{z^2}{|z|^2}=\frac{x^2-y^2+2ixy}{x^2+y^2}$

$u=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ، $v=\frac{2xy}{x^2+y^2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الدوال العقدية الأساسية:

$$z = x + iy = |z| \cos \operatorname{Arg} z + i|z| \sin \operatorname{Arg} z$$
$$= |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$$

① الدالة الكسرية:

$$w = \frac{a_0 z^n + a z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}$$

حالة خاصة $\begin{cases} b_m = 1 \\ m = 0 \end{cases}$ سمى كثيرة حدود من الدرجة n

② الدالة الأساسية:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

ولها الخواص التالية:

① $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

② $e^{z + 2k\pi i} = e^z$; $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

وبالتالي هي دورية ودورها 2π

لإيجاد القسم الحقيقي والتخيلي لهذه الدالة:

$$e^z = u + iv$$
$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$
$$= e^x [\cos y + i \sin y]$$
$$u(x,y) = e^x \cos y$$
$$v(x,y) = e^x \sin y$$

$z \in \mathbb{C}$ معرفة من أجل أي $|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3) الدالة المثلثية: $\sin z$, $\cos z$

والمعرفة بكثيرة الحدود:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

حيث $z \in \mathbb{C}$ بالإضافة إلى أنها دورية

ودورها (2π) تملك فقط أصفاراً حقيقية

أصفار $\sin$ $z_k = k\pi$

أصفار $\cos$ $z_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}$

نريد إيجاد القسم الحقيقي والتخيلي:

$\sin z = u_1 + i v_1$

$\cos z = u_2 + i v_2$

تكتب بدلالة الأسية $\sin, \cos$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

العلاقة بين الدوال المثلثية والأسية

$$\sin z = \frac{e^{ix} e^{-y} - e^{-ix} e^{y}}{2i} \quad (-i)$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

بالجمع والطرح نحصل على العلاقات *

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$tg\,z = \frac{\sin z}{\cos z}\,, \quad ctg\,z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$tg\,z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

4) الدوال القطعية: $sh\,z\,,\ ch\,z\,,\ th\,z\,,\ cth\,z$

معرفة بالعلاقة:

$$sh\,z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad (2)$$

$$ch\,z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$th\,z = \frac{sh\,z}{ch\,z}$$

$$cth\,z = \frac{ch\,z}{sh\,z} \quad (3)$$

$$sh\,z = \frac{1}{2}\left(e^{x}e^{iy} - e^{-x}e^{-iy}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x+iy} - e^{-(x+iy)}\right)$$

$$sh\,z = \frac{1}{2}\left(e^{x}\cos y + ie^{x}\sin y - e^{-x}\cos y + ie^{-x}\sin y\right)$$

$$sh\,z = \frac{1}{2}\left(e^{x}\cos y - e^{-x}\cos y\right) + i\left(e^{x}\sin y + e^{-x}\sin y\right)$$

$$u = \frac{(e^{x} - e^{-x})\cos y}{2}$$

$$v = \frac{(e^{x} + e^{-x})\sin y}{2}$$

* الدوال المثلثية والقطعية مرتبطة بعضها بالدوال الآتية:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\sin z = -i \sh iz$$

$$\cos z = \ch iz$$

$$\tg z = -i \th iz$$

$$\ctg z = i \cth iz$$

- العلاقة العكسية بدلالة الدائرية:

$$\sh z = -i \sin(iz)$$

$$\ch(z) = \cos(iz)$$

$$\th z = -i \tg(iz)$$

$$\cth z = i \ctg(iz)$$

إثبات الأولى:

$$\sh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\right) = -i(\sh z)$$

إثبات الثانية:

$$m = iz \;;\; \ch(m) = \frac{e^m + e^{-m}}{2}$$

$$\ch iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

(5) المعرف اللوغاريتمية: $\ln(z)$ حيث $z \neq 0$

معرفة بالشكل التالي:

(4)
$$\ln(z) = \ln|z| + i \arg z$$
$$\ln(z) = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i \;;\; (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حيث من أجل $k=0$ نعرف القيمة الأساسية لدالة $Ln(z)$

هي: $ln(z) = ln|z| + i\arg z$

وبالتالي:

$$Ln(z) = ln(z) + 2k\pi i; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(6) الدوال العكسية للدوال المثلثية:

$Arc\sin z, Arc\cos z, Arc\,tg\,z, Arc\,ctg\,z$

لنفرض أن $z = \cos w$ عندئذٍ فإن $w = arc\cos z$

كل هذه الدوال يمكن تمثيلها بواسطة الدوال اللوغاريتمية

$$Arc\sin z = -i\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

$$Arc\cos z = -i\ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$$

$$Arg\,tg\,z = \frac{-i}{2}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

$$Arc\,ctg\,z = \frac{-i}{2}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$$

(7) دالة القوى: $w = z^a$

حيث $a = \alpha + i\beta$ عدد عقدي اختياري

يمكن كتابتها بالشكل:

$$z^a = e^{a\ln z}$$

وقيمتها الأساسية عندما اللوغاريتم يأخذ القيمة الأساسية

$z^a = e^{a\ln(z)}$

أي عندما $k=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

في الحالة الأساسية العامة $w = a^z$ حيث $a \neq 0$

عند كتابة الصيغة يعطى العلاقة

$a^z = e^{z \ln a}$

القيمة الأساسية:

$a^z = e^{z \ln a}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z