كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : جبر المنطق

المحاضرة : ٢+٣/نظري/د .لمى رزوق

{{ A to Z مكتبة }}

التحويلات بين أنظمة العدّ

تُمكننا معرفة التحويلات بين أنظمة العدّ من فهم كيفية تمثيل الأعداد في الحواسيب. سنستعرض كيفية التحويل بين الأنظمة المختلفة: الثنائي، العشري، الثماني، والست عشري.

التحويل إلى النظام العشري:

لتحويل أي عدد من أي نظام عدّ (ثنائي، ثماني، ست عشري) إلى النظام العشري يتم:

1- **تمثيل العدد بصيغته العامة** (تحليل العدد إلى مراتبه اعتماداً على **أساس** ذلك النظام)

$$\boldsymbol{X = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \; b^i}$$

ثمّ

2- إيجاد **ناتج جمع** الحدود

والعدد الناتج من الجمع سيكون عدد في النظام العشري.

أمثلة:

1. **من الثنائي إلى العشري:**

$$\begin{aligned}(1101)_2 &= 1\times 2^0 + 0\times 2^1 + 1\times 2^2 + 1\times 2^3\\ &= 1\times 1 + 0\times 2 + 1\times 4 + 1\times 8\\ &= 1 + 0 + 4 + 8\\ &= (13)_{10}\end{aligned}$$

2. **من الثماني إلى العشري:**

$$\begin{aligned}(125)_8 &= 5\times 8^0 + 2\times 8^1 + 1\times 8^2\\ &= 5\times 1 + 2\times 8 + 1\times 64\\ &= 5 + 16 + 64\\ &= (85)_{10}\end{aligned}$$

3. **من الست عشري إلى العشري:**

$$
\begin{aligned}
(9FD)_{16} &= D \times 16^{0} + F \times 16^{1} + 9 \times 16^{2} \\
&= 13 \times 16^{0} + 15 \times 16^{1} + 9 \times 16^{2} \\
&= 13 \times 1 + 15 \times 16 + 9 \times 256 \\
&= 13 + 240 + 2304 \\
&= (2557)_{10}
\end{aligned}
$$

التحويل من نظام العدّ العشري إلى أنظمة العدّ الأُخرى:

لتحويل أي عدد عشري إلى أي نظام:

- نقوم بتقسيم العدد العشري على أساس النظام المطلوب التحويل إليه
- نحتفظ بباقي القسمة
- نأخذ ناتج القسمة ونقسمه مرة أخرى على أساس النظام ونحتفظ بالباقي وهكذا
- نستمر بتكرار العملية إلى أن نحصل على **ناتج قسمة يساوي صفر**
- يكون ناتج التحويل في عمود باقي القسمة **من الأسفل إلى الأعلى** ويُكتب **من اليسار إلى اليمين**

أمثلة:

1. **من العشري إلى الثنائي:**

القسمة	الناتج	الباقي
$45 \div 2$	22	1
$22 \div 2$	11	0
$11 \div 2$	5	1
$5 \div 2$	2	1
$2 \div 2$	1	0
$1 \div 2$	0	1

الناتج: $(101101)_2$

2. العشري إلى الثماني:

القسمة	الناتج	الباقي
145÷8	18	1
18÷8	2	2
2÷8	0	2

الناتج: $(221)_8$

3. العشري إلى الست عشري:

القسمة	الناتج	الباقي	الرمز السداسي عشري
250 ÷ 16	15	10	A
15 ÷ 16	0	15	F

الناتج: $(FA)_{16}$

التحويل من النظام الثنائي إلى الثماني وبالعكس:

- لتحويل العدد من النظام الثنائي إلى الثماني يقسم العدد الثنائي إلى مجاميع من **ثلاثة مراتب** وإذا انتهت الأطراف بمراتب أقل من ثلاثة تكمل بأصفار، ثم تحول كل مجموعة ثلاثية في النظام الثنائي إلى ما يقابلها في النظام الثماني كما في الجدول، والعدد الناتج هو العدد بالنظام الثماني.

Octal الثماني	Binary الثنائي		
	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

مثال:

حول العدد $(11010111)_2$ إلى النظام الثماني :

$$
\begin{array}{ccc}
011 & 010 & 111 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
3 & 2 & 7
\end{array}
$$

$(11010111)_2 = (327)_8$

- ولتحويل أي عدد من النظام الثماني إلى الثنائي فتكون العملية عكسية نسبة للتحويل السابق حيث يحول كل رمز ثماني إلى ما يعادله في النظام الثنائي من **ثلاثة رموز** وحسب الجدول السابق.

مثال:

حول العدد $(321)_8$ إلى النظام الثنائي :

$$
\begin{array}{ccc}
3 & 2 & 1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
011 & 010 & 001
\end{array}
$$

$(321)_8 = (11010001)_2$

التحويل من النظام الثنائي إلى النظام الست عشري وبالعكس:

إن التحويل بين النظام الست عشري والثنائي هو شبيه بطريقة التحويل الثنائي والثماني الفرق فقط هو أن المجاميع الثنائية في التحويل هي **أربعة مراتب** وذلك حسب الجدول.

السادس عشري Hexadecimal	Binary الثنائي			
	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
A	1	0	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	1	1	0	1
E	1	1	1	0
F	1	1	1	1

مثال: حول العدد $(1111011)_2$ إلى النظام السادس عشري :

$$\begin{array}{cc} \underline{0111} & \underline{1011} \\ \downarrow & \downarrow \\ 7 & B \end{array}$$

$$(1111011)_2 = (7B)_{16}$$

مثال: حول العدد $(8D)_{16}$ إلى النظام الثنائي :

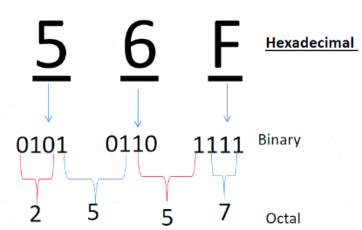
$$\begin{array}{cc} 8 & D \\ \downarrow & \downarrow \\ 1000 & 1101 \end{array}$$

$$(8D)_{16} = (\mathbf{10001101})_2$$

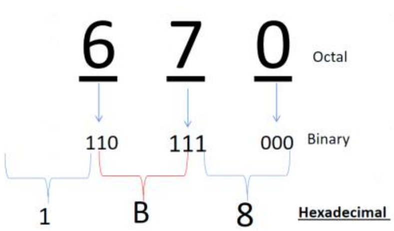
التحويل من النظام الثماني إلى الست عشري وبالعكس:

للتحويل بين النظام الثماني والست عشري يتم الاستفادة من التحويلات السابقة لإنجاز التحويل النهائي، فالتحويل من الثماني إلى الست عشري، يتم تحويل الثماني إلى الثنائي ومن ثم تحويل الثنائي (الناتج) إلى الست عشري، والعكس صحيح.

أمثلة:



$$(56F)_{16} = (2557)_8$$



$$(670)_8 = (1B8)_{16}$$

قد تتنوع أشكال البيانات التي يتعامل معها الحاسب الآلي، فلا يتعامل مع الملف الصوتي كما هو الحال في الملف النصي، وبالتالي تختلف طريقة تمثيلها. إنّ النظام المستخدم في الحاسب الآلي هو النظام الثنائي، وكل نوع من البيانات باختلاف أنواعها، تترجم بالنهاية إلى النظام الثنائي الذي تم شرح آليته سابقًا.

تمثيل الأعداد مع إشارة

Signed Number Representations

يتم تمثيل الأعداد الصحيحة في الحاسوب باستخدام الخانات الثنائية بطول محدد مسبقاً ب n-خانة والتي تعادل n-bit (عادةً يكون طول سجل التخزين من مضاعفات العدد 8). هذا يسمح بتمثيل 2^n عدداً صحيحاً، فمثلاً باستخدام 8-bit يكون مجال الأعداد الصحيحة الموجبة $[0, 2^8-1]$، بمعنى آخر أكبر عدد يمكن تمثيله ب 8 خانات هو $2^8-1=255$ عدداً. أمّا مجال الأعداد السالبة $[-255, 255] = [-(2^8-1), 2^8-1]$

ملاحظات:

المفهوم	التوضيح
الخانة في العدد الثنائي	تمثل موقع رقم ثنائي (0 أو 1)
البت(Bit)	هو نفسه الخانة الواحدة في النظام الثنائي
العلاقة	**كل خانة ↔ بت واحد**
عدد البتات	يحدد **مدى الأعداد الممكن تمثيلها** و**دقة التخزين**

طرق تمثيل الأعداد مع الإشارة بالنظام الثنائي

أولاً: الطريقة المباشرة/طريقة الإشارة-سعة (Sign-Magnitude)

← بعد تحويل العدد **إلى** النظام الثنائي، يتم تخصيص خانة في أقصى اليسار لتمثل الإشارة كما يلي:

- الإشارة **الموجبة** تُمثّل بالقيمة **0**
- الإشارة **السالبة** تُمثَّل بالقيمة **1**

خانة الإشارة	ترميز العدد بالنظام الثنائي (القيمة المطلقة للعدد)

♦ يتم تمثيل الصفر الموجب والسالب بطريقة الإشارة-سعة ب 8 خانات ثنائية كالتالي:

الصفر بالنظام العشري	التمثيل الثنائي بطريقة الإشارة
+0	0 0 000 000
-0	1 0 000 000

مثال: مثّل العدد $(-13)_{10}$ في 8 خانات ثنائية باستخدام طريقة الإشارة - سعة

$(13)_{10}=(1101)_2$

1	0	0	0	1	1	0	1

نملأ الخانات الفارغة أصفاراً حتى يصبح لدينا 8 خانات بحيث تكون الخانة الأخيرة للإشارة

العدد بالنظام العشري	التمثيل الثنائي
+13	0 0001101
-13	1 0001101

← وبالعكس عند تحويل العدد **من** النظام الثنائي: عند وجود خانات ثنائية من مضاعفات العدد 8 ونريد معرفة العدد الموافق، نحدد الإشارة وفقاً للخانة في أقصى اليسار، ونحسب الخانات الباقية العدد بالقيمة المطلقة.

أمثلة:

1	0	0	0	0	0	1	1	= -3

1	0	0	0	1	1	1	1	= -15

ثانياً: طريقة المتمم الأحادي (One’s Complement)

← 1- يتم تحويل العدد الموجب **إلى** النظام الثنائي

2- نملأ الخانات الفارغة أصفاراً حتى يصبح لدينا عدد الخانات من مضاعفات العدد 8

3- يُمثَّل **العدد الموجب** دون أي تعديلات (صفر في خانة الإشارة)، في حين نوجد المتمم الأحادي **للعدد السالب** بتبديل قيم الخانات:

$\boxed{1\to0}$ $\boxed{0\to1}$

- يتم تمثيل الصفر الموجب والسالب بطريقة المتمم الأحادي ب8 خانات ثنائية كالتالي:

التمثيل الثنائي بطريقة المتمم الأحادي ب8 خانات	**الصفر بالنظام العشري**
00000000	+0
11111111	-0

- **ملاحظة:**

عند جمع العدد مع متممه الأحادي سينتج عدد ثنائي كل خاناته 1.

مثال: أوجد تمثيل العدد $(-13)_{10}$ ب8 خانات ثنائية باستخدام طريقة المتمم الأحادي

1101	**13**
00001101	+13
11110010	-13
11111111	الجمع

$(-13)_{10}=(11110010)_2$

ملاحظة:

تمثيل $(-13)_{10}$ ب 16 خانة بطريقة المتمم الأحادي يكون كالتالي:

0000000000001101	+13
1111111111110010	-13 =المتمم الأحادي ل13

← وبالعكس عند تحويل العدد **من** النظام الثنائي: عند وجود خانات ثنائية عددها من مضاعفات العدد 8 ونريد معرفة العدد الموافق بالنظام العشري:

1- نحدد الإشارة وفقاً للخانة في أقصى اليسار(إذا كان 0 فالعدد موجب، وإذا كان 1 فالعدد سالب)

2- نبدّل قيم الخانات

3- نوجد العدد المكافئ بالنظام العشري.

مثال:

$(\boxed{1}\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)_2$

$\downarrow$

$(-15)_{10} \longrightarrow 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1$

ثالثاً: طريقة المتمم الثنائي (Two's Complement)

← 1- يتم تحويل العدد الموجب **إلى** النظام الثنائي

2- نملأ الخانات الفارغة أصفاراً حتى يصبح لدينا عدد الخانات من مضاعفات العدد 8

3- يُمثَّل **العدد الموجب** دون أي تعديلات (صفر في خانة الإشارة)، في حين نوجد المتمم الأحادي **للعدد السالب** بتبديل قيم الخانات:

$1 \rightarrow 0$ $\quad$ $0 \rightarrow 1$

تذكير **بالجمع** في النظام الثنائي:

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

```
  01
  01 +
------
  10
```

4-نوجد المتمم الثنائي **بإضافة** 1 إلى المتمم الأحادي

أو

<u>طريقة أُخرى لإيجاد المتمم الثنائي:</u>

نتحرك من يمين ليسار العدد الموجب واضعين الأصفار كما هي حتى مقابلة أول قيمة =1، نضعها كما هي، ثم نقلب كل القيم التي تليه.

مثال:

إذا كان لدينا العدد $(5)_{10}$ في نظام 8 بت:

– التمثيل الثنائي لـه هو 00000101.

– المتمم الأحادي لـ(-5) سيكون: 11111010 (عكس جميع البتات).

– ثم نضيف 1:

```
 11111010
        1 +
 ---------
 11111011
```

فيكون المتمم الثنائي لـ(-5) هو: 11111011.

مثال (للطريقة الثانية):

إذا كان لدينا العدد $(00001000)_2 = (8)_{10}$ في نظام 8 بت، فيكون المتمم الثنائي لـه هو:

$(11111000)_2$

مثال:

- إذا كان لدينا العدد $(128)_{10}$ في نظام 8 بت:

– التمثيل الثنائي لـه هو 10000000.

– المتمم الأحادي لـ(-5) سيكون: 01111111 (عكس جميع البتات).

– ثم نضيف 1:

```
01111111
       1 +
---------
10000000
```

فيكون المتمم الثنائي لـ(-128) هو: 10000000.

- إذا كان لدينا العدد $(128)_{10}$ في نظام 16 بت:

– التمثيل الثنائي لـه هو

0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

– المتمم الأحادي لـ $(-128)_{10}$ سيكون: (عكس جميع البتات)

1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

– ثم نضيف 1:

```
1111111101111111
               1 +
---------
```

1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

فيكون المتمم الثنائي لـ$(-128)_{10}$ هو: 1111111110000000.

→ وبالعكس عند تحويل العدد **من** النظام الثنائي: عند وجود خانات ثنائية عددها من مضاعفات العدد 8 ونريد معرفة العدد الموافق بالنظام العشري:

1- نحدد الإشارة وفقاً للخانة في أقصى اليسار(إذا كان 0 فالعدد موجب، وإذا كان 1 فالعدد سالب)
2- نبدّل قيم الخانات، فنجد بذلك المتمم الأحادي
3- نضيف 1 للحصول على العدد السالب
4- نوجد العدد المكافئ بالنظام العشري

مثال:

$$\boxed{1}\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1$$

$$\Downarrow$$

المتمم الأحادي →	0 0 1 0 0 1 0 0
+ 1 →	+ 1
	0 0 1 0 0 1 0 1

$(00100101)_2 = (37)_{10}$ ، إذاً:

$$(11011011)_2 = (-37)_{10}$$

تمثيل الأعداد الكسرية

Fractional Number Representations

تتكون الأعداد الكسرية من جزء صحيح وجزء كسري، مثل 3.75 أو 2.5-

في نظام العد الثنائي، يمكن تمثيل الأعداد الكسرية باستخدام طرائق معينة تعتمد على تحويل كل من الجزء الصحيح والجزء الكسري.

خطوات تمثيل الأعداد الكسرية في النظام الثنائي بطريقة الفاصلة الثابتة

1 . **تحويل الجزء الصحيح:** يتم ذلك وفق التحويل إلى النظام الثنائي.

2 . **تحويل الجزء الكسري:** لتمثيل الجزء الكسري، نتبع الخطوات التالية:

- نضرب الجزء الكسري بالرقم 2.
- نأخذ الجزء الصحيح الناتج (0 أو 1) كجزء من النتيجة.
- نكرر العملية مع الجزء الكسري الناتج حتى نحصل على دقة كافية أو يصبح الجزء الكسري **صفرًا**.
- نضع الأجزاء الصحيحة الناتجة عن القسمة على يمين الفاصلة، من اليسار إلى اليمين.

وعند التمثيل بخانات عددها من مضاعفات العدد 8، نمثل الجزء الكسري **بدون الصفر** كما يلي:

- ♦ تكون خانة الإشارة في أقصى اليسار
- ♦ نضع أصفاراً على يمين العدد الناتج لملأ الخانات التي تبقى فارغة حتى نصل للخانة الأولى

خانة الإشارة			الكسري	الجزء			الخانة الأولى

مثال: تحويل العدد 0.75 إلى ثنائي:

$0.75\times 2= \boxed{1}.5$ (الجزء الصحيح هو 1)

$0.5\times 2= \boxed{1}.0$ (الجزء الصحيح هو 1)

إذاً، العدد 0.75 في النظام الثنائي هو: $0.\boxed{11}$

مثال: لتحويل العدد الكسري $(0.8125)_{10}$ إلى ثنائي:

$0.8125\times2=\boxed{1}.625$

$0.625\times2=\boxed{1}.25$

$0.25\times2=\boxed{0}.5$

$0.5\times2=\boxed{1}.0$

الإشارة موجبة

0	1	1	0	1	0	0	0
8	7	6	5	4	3	2	1

إذاً، العدد $(0.8125)_{10}$ في النظام الثنائي هو $(0.1101)_2$

ملاحظة: لتمثيل العدد الكسري السالب:

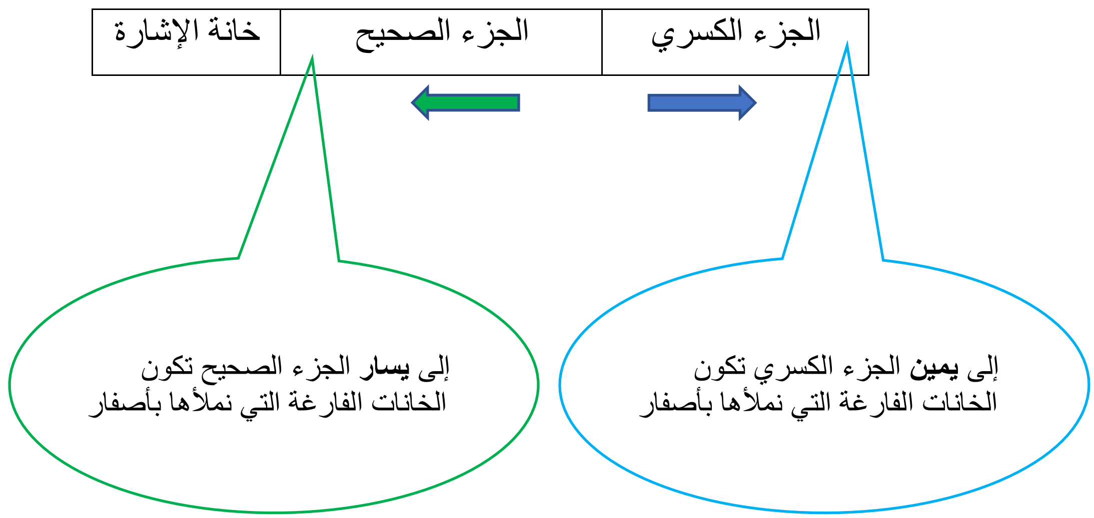
- نحول العدد من دون إشارة إلى النظام الثنائي.
- نوجد المتمم الأحادي.
- نوجد المتمم الثنائي.

مثال: لتحويل العدد الكسري $(-0.8125)_{10}$ إلى ثنائي:

العدد الموجب $(0.8125)_{10}=(0.1101)_2$	0	1	1	0	1	0	0	0
المتمم الأحادي	1	0	0	1	0	1	1	1
المتمم الثنائي	1	0	0	1	1	0	0	0

إذاً، العدد $(-0.8125)_{10}$ في النظام الثنائي هو $(1.0011)_2$

3 . دمج الجزء الصحيح مع الجزء الكسري



مثال: لتحويل العدد الكسري $(-26.8125)_{10}$ إلى ثنائي:

	خانة الإشارة	الجزء الصحيح							الجزء الكسري							
رقم الخانة	8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5	4	3	2	1
العدد الموجب $(26.8125)_{10}=(11010.1101)_2$	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
المتمم الأحادي	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1
المتمم الثنائي	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0

إذاً، $(-26.8125)_{10}=(11100101.0011)_2$

ازرعوا المحبة في قلوبكم، والمعرفة في عقولكم
فنحن بالحب نسمو، وبالعلم نبني ♡