كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك١

المحاضرة : الثانية/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

ميكانيك (1)
المحاضرة الثانية عملية

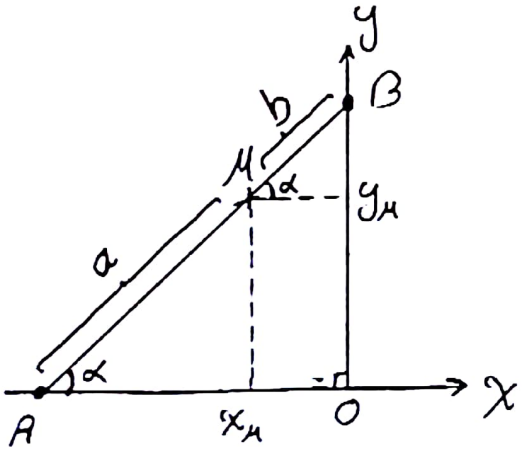
السؤال الأول: ليكن AB سلم يستند بأحد طرفيه A على الأرض وبالطرف الآخر B إلى الجدار، ويصنع زاوية مع الأرض قدرها $\alpha = lt$ حيث l عدد ثابت. والمطلوب:

1) أوجد معادلات الحركة للنقطة M من السلم والتي تبعد عن A بمقدار (a) وتبعد عن B بمقدار (b)، ثم أوجد معادلة المسار.

2) أوجد معادلة راسم الخط.

3) أوجد شعاع السرعة والسرعة العددية.

4) أوجد شعاع التسارع والتسارع العددي.



الحل: 1)

لإيجاد معادلات الحركة نوجد مساقط M على المحاور الإحداثية:

$$\begin{cases} x = -b\cos(\alpha) = -b\cos(lt) \\ y = a\sin(lt) \end{cases}$$

لإيجاد المسار نحذف الزمن من x و y:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{b} &= -\cos(lt) \\ \frac{y}{a} &= \sin(lt) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{بالتربيع والجمع}} \left[\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\right]$$

وهو معادلة قطع ناقص

2) إيجاد المعادلة الديكارتية:

$$\begin{cases} x_1 = x' = lb\sin(lt) \\ y_1 = y' = la\cos(lt) \end{cases}$$

بحذف الزمن من x_1 و y_1:

$$\Leftarrow \text{بالتربيع والجمع} \begin{cases} \frac{x_1}{lb} = \sin(lt) \\ \frac{y_1}{la} = \cos(lt) \end{cases}$$

$$\left[\frac{x_1^2}{(lb)^2} + \frac{y_1^2}{(la)^2} = 1 \right]$$

وهي معادلة قطع ناقص

3) شعاع السرعة:

$$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$
$$= lb\sin(lt)\,\vec{i} + la\cos(lt)\,\vec{j}$$

السرعة العددية:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$
$$= \sqrt{l^2b^2\sin^2(lt) + l^2a^2\cos^2(lt)}$$

4) شعاع التسارع:

$$\vec{w} = x''\vec{i} + y''\vec{j}$$
$$= l^2b\cos(lt)\,\vec{i} - l^2a\sin(lt)\,\vec{j}$$

التسارع العددي:

$$|\vec{w}| = \sqrt{x''^2 + y''^2}$$

السؤال الثاني: نقطة مادية تتحرك في المستوي xoy على المنحنى $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$

بحيث تكون السرعة الزاوية $\theta' = 1$

علماً أنه في اللحظة $t=0$ كانت $\theta = 0$. والمطلوب:

1) أوجد معادلات الحركة لهذه النقطة.

2) أوجد السرعة العددية والتسارع العددي.

الحل: بوجود θ' و θ لنستخدم الإحداثيات القطبية ... (*)

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\}$$

لدينا $\theta' = 1 \iff \frac{d\theta}{dt} = 1$

بالمكاملة $\theta = t + c$ وعندما $t=0$ كانت $\theta = 0 \iff c = 0$

$$\iff [\theta = t] \ldots (1)$$

إيجاد r: بتعويض (*) في $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$;

$$(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^2 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow (r^2)^2 = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow r^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta \Rightarrow r^2 = \cos 2\theta$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\cos 2\theta} \; ; \; \theta = t$$

$$\Rightarrow [r = \sqrt{\cos(2t)}] \ldots (2)$$

بتعويض (1) و (2) في (*) نحصل على معادلات الحركة في الإحداثيات الديكارتية:

$$x = \sqrt{\cos(2t)} \cdot \cos(t)$$

$$y = \sqrt{\cos(2t)} \cdot \sin(t)$$

2) السرعة العمودية:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

$$\dot{r} = \frac{-2\sin 2t}{2\sqrt{\cos(2t)}} = \frac{\sin 2t}{\sqrt{\cos(2t)}}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{\sin^2(2t)}{\cos(2t)} + \cos(2t)\cdot 1$$

$$= \frac{\sin^2(2t) + \cos^2(2t)}{\cos(2t)} = \frac{1}{\cos(2t)}$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}} = \frac{1}{r}$$

نلاحظ أن السرعة تناسب عكسيا مع نصف القطر

التسارع العمودي:

$$W = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}$$

أو باستخدام

$$W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

مكتبة A to Z