كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الحلقة: $(R, +, \cdot)$ مجموعة غير خالية مزودة بقانونا تشكيل:

$$+ : R \times R \to R$$

$$\cdot : R \times R \to R$$

بحيث تحقق الخواص التالية:

1) $(R, +)$ زمرة تبديلية الحيادي 0.

2) $a(b.c) = (a.b)c \quad \forall a, b, c \in R$

3) $(b+c).a = ba + ca$ ، $a.(b+c) = a.b + a.c$

$\forall a, b, c \in R$

* ملاحظة: إذا وجد عنصر $1 \in R$ حيث $1.a = a.1 \quad \forall a \in R$ يقال عن R إنها حلقة بواحدة.

* ملاحظة: $1 \neq 0$

إذا تحقق $a.b = b.a$ من أجل كل $a, b \in R$ نقول الحلقة R هي حلقة تبديلية.

خواص هامة:

① $a(-b) = (-a)b = -ab$

② $0a = a0 = 0$

③ $(b-c)a = ba - ca$

$a(b-c) = ab - ac$

④ $(-1)a = -a$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

تعريف: في الحلقة $(R,+,\cdot)$ إذا كان $a.b=0$ و $a\neq 0$، $b\neq 0$ عندئذٍ يقال أن a,b قواسم الصفر (Zero devisors)

تعريف: عنصر الواحدة في الحلقة الواحدية $(R,+,\cdot)$ هو كل عنصر $a\in R$ له نظير ضربي (مقلوب)

$a\neq 0$ عنصر واحدة (Unit) $\Leftrightarrow \exists b\in R;\ ab=ba=1$

* $R^*\subset R$ أسرة الواحدات في الحلقة الواحدية وتدعى الزمرة الواحدات Group of Units

برهنة: إذا كانت R حلقة & تحوي قواسم الصفر و $a\neq 0$ بحيث $ab=ac$ عندئذٍ $b=c$

الإثبات:

$ab-ac=0 \Leftrightarrow ab=ac$

$\Leftrightarrow a(b-c)=0$

وبما أن $a\neq 0$ والحلقة & تحوي قواسم الصفر

$\Rightarrow b-c=0 \Rightarrow b=c$

* الحلقة المحيطية Integral Domain

هي حلقة تبديلية بواحدة & تحوي قواسم الصفر.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* حلقة القسمة Division ring:
هي حلقة بواحدة تحقق أن $R^* = R \setminus \{0\}$
أي أنّ كل عنصر من R غير صفري له نظير ضربي يدعى المقلوب

* الحقل: هو حلقة قسمة تبديلية.

برهنة: كل حلقة جزئية منتهية من حقل هي حقلاً.
الإثبات:
نفرض أن $0 \neq a \in R$ ، نعرف التطبيق:

$$\phi_a : R \to R$$
$$\phi_a(b) = ab$$
$$\phi_a(b) = \phi_a(c)$$
$$ab = ac \quad \text{عندئذ}$$
$$b = c \quad \text{إذا}$$

ϕ_a تطبيق متباين وبما أن R منتهية $|R| = |\phi_a(R)|$
وبالتالي $\phi_a(R) = R$
وبشكل خاص من أجل 1 نجد أن:
$ax = 1$ من أجل x ما في R
وبالتالي x هو مقلوب a ، وبسبب كيفية $a \neq 0$ من R
نجد أن R حقلاً.

* تعريف: مميز الحلقة: إذا كانت R حلقة بواحدة نعرف مميز الحلقة R بأنّه أصغر عدد طبيعي n يحقق $n.1 = 0$
مرة n $1 + 1 + \cdots + 1 = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إذا كان $n.1 \neq 0$ لكل $n \in N$ عندئذٍ نقول إن مميز الحلقة يساوي الصفر.

يرمز لمميز الحلقة بالرمز $Char(R)$

* مبرهنة: إذا كانت R حلقة صحيحة فإنّ $Char(R)=0$ أو $Char(R)=p$ حيث p عدد أولي.

الإثبات:

إذا كان $CharR=0$ فقد تمّ المطلوب لذلك نفرض أن $CharR \neq 0$ و أن $CharR=n$ حيث n عدد مركب (غير أولي) عندئذٍ يمكن أن نكتب $n=r.s$ و $1<r<n$ $1<s<n$

حسب تعريف مميز الحلقة فإن: $r.1 \neq 0$

$s.1 \neq 0$

ولكن: $0=n.1=(r.1)(s.1)$ $\quad r.1 \in R$ $\quad s.1 \in R$

يعني وجود قواسم للصفر في R وهذا يناقض كون R حلقة صحيحة.

إذا n ليس مركباً وإذاً أولياً $\boxed{n=p}$

* الحلقة الجزئية: بنى الحلقة $(R,+,.)$ هي مجموعة جزئية في R $R' \subset R$ تشكل بدورها حلقة بالعمليتين المجموع والجداء $(R',+,.)$ حلقة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أمثلة هامة:

① ~~2~~ $2\mathbb{Z} = \{$مجموعة الأعداد الزوجية$\}$

حلقة جزئية من $\mathbb{Z}$ مع عمليتي الجمع والجداء المألوفتين.

② $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$

مجموعة الأقواس بالقياس للعدد n حيث نقول أن a يطابق b بالقياس للعدد n ونكتب:

$$\forall a,b \quad a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid a-b$$

إذا وفقط إذا كان $a \equiv b \pmod{n}$ إنّ $\mathbb{Z}_n$ تشكل حلقة مع عمليتي الجمع والضرب بالقياس للعدد n.

✗ $\mathbb{Z}_n$ لها قواسم للصفر إذا وفقط إذا كان n عدد مركب.

الإثبات:

في الواقع إذا كان $n = r.s$;

$$1 < r < n$$

$$1 < s < n$$

عندئذٍ $r.s = 0$

إذا $\mathbb{Z}_n$ تحوي قواسم للصفر

بصورة معاكسة إذا كان $\mathbb{Z}_n$ تملك قواسم للصفر عندئذٍ $a.b = 0$ مع $a \neq 0$, $b \neq 0$ نختار مثلاً من مجموعة التكافؤ b, a

بحيث

$$0 < a < n$$

$$0 < b < n$$

هذا يعني أن $a.b = 0$ تعني: $a.b = k.n$

$\Leftarrow k = p_1 . p_2 \ldots p_f$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$ab = (p_1 . p_2 . \cdots p_f)n$ (*)

إن كل $p_i | a.b$ من أجل $2 \leq i \leq f$

وبالتالي $p_i | a$ و $p_i | b$

نقوم بعمليات متتابعة لطرفي العبارة (*) على $p_1, \cdots, p_f$

حتى يصبح لدينا n بالطرف الأيمن و $a'.b' = n$

حيث $a' < a$ أو $b' < b$

وهذا يناقض كون a, b أصغريان كمثلي يحققان التكافؤ

إذا n مركب.

* $\mathbb{Z}[i] = \{m + ni ; n, m \in \mathbb{Z}\}$

حلقة مع $+$ و $\cdot$ الاعتيادي وواحداتها $\{\pm 1, \pm i\}$

* تعريف: التطبيق $f: R \to S$ حيث R, S حلقتان نقول إنّ f هو مورفيزم حلقات إذا تحقق:

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$
$$f(a.b) = f(a) . f(b)$$

* تعريف: ليكن R حلقة و $I \subset R$ نقول إنّ I مثالي إذا وفقط إذا كانت: ① $I \neq \emptyset$: أمرة جمعية

② $Ir \subset I, rI \subset I$

لكل $r \in R$

انتهت المحاضرة 8

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z