كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

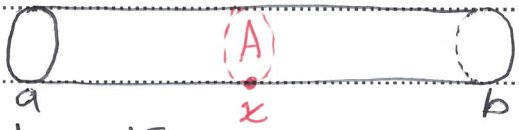
كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

معادلة التوصيل (النقل) Transport equation

نفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة منتظمة c عبر أنبوب رفيع G ذو مقطع منتظم A
نعبر عن G بالمجال المفتوح (a,b) ولتكن السرعة $c>0$
بالاتجاه الموجب للحركة على المحور x



اتجاه جريان الماء ←

نفرض أن تركيز المادة الكيميائية ثابت عبر المقطع A في كل نقطة x وبذلك فإن تركيز المادة الكيميائية تتغير تبعاً لـ x فقط (المسألة أحادية البعد)
ولتكن $u(x,t)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق وتعبر عن تركيز المادة الكيميائية في النقطة x واللحظة t.
بالتالي كمية المادة الكيميائية الموجودة في الأنبوب بين المقطعين A و x :

$$\int_a^x A\,u(s,t)\,ds \quad \Rightarrow \text{وبعد أن الماء يجري بسرعة منتظمة } c \text{ فإنه في اللحظة } t+h \quad = \int_{a+ch}^{x+ch} A\,u(s,t+h)\,dx$$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ x:

$$\Rightarrow u(x,t) = u(x+ch, t+h)$$

نشتق بالنسبة لـ h:

$$\Rightarrow 0 = c u_x(x+ch, t+h) + u_t(x+ch, t+h)$$

قانون هام استخدمناه:

$$\left(\int_{f(x)}^{g(x)} u(s)\,ds\right)' = g'(x)\,u(g(x)) - f'(x)\,u(f(x))$$

توضيح الاشتقاق بالنسبة لـ h:

$$\frac{\partial u(x+ch, t+h)}{\partial h} = \frac{\partial u(x+ch, t+h)}{\partial (x+ch)} \cdot \frac{\partial (x+ch)}{\partial h} + \frac{\partial u(x+ch, t+h)}{\partial (t+h)} \cdot \frac{\partial (t+h)}{\partial h}$$

نجعل h تتقارب من الصفر

$$u_t(x,t) + c\,u_x(x,t) = 0 \qquad \forall (x,t)$$

وهذه هي معادلة النقل

تسمى هذه المعادلة معادلة التوصيل (النقل) في البعد الواحد وهي معادلة متجانسة من الرتبة الأولى قيمتها (الأغراض)

كل هذه المعادلة نستخدم طريقة الأغراض

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{c} = \frac{du}{0}$$

$$x - ct = k_1$$

$$u(x,t) = k_2$$

$$F(x-ct, u) = 0$$

$$u(x,t) = f(x-ct)$$

* ملاحظة: نقول الحل $u(x,t) = f(x-ct)$ بالموجة المتنقلة نحو اليمين لأن المنحني البياني للتابع $f(x-ct)$ هو نفس بيان $f(x)$ ولكن بالزياح نحو اليمين بقيمة ct وبالتالي بمرور الوقت منحني $f(x)$ يتحرك نحو اليمين بسرعة c وبدون تغيير.

مسألة القيمة الابتدائية الحدية:

$$u_t(x,t) + c\,u_x(x,t) = 0$$

* $u(x,0) = g(x)$ ← تابع معطى

حيث g تابع مستمر وقابل للاشتقاق

حل عام: $u(x,t) = f(x-ct)$

تابع اعتباطي

* لإيجاد حل خاص لأية نوجد بالشرط الابتدائي

$$g(x) = u(x,0) = f(0) \quad (t=0)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = g(x-ct)$$

- سؤال: أوجد الحل الذي يأخذ قيماً معينة على منحني معطى:

$$x_0(t) = t$$

$$y_0(t) = 0$$

$$u_0(t) = g(t)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$u_t - 3u_x = 0$$

الشرط الابتدائي:

$$x_0(t) = t$$

$$y_0(t) = 0$$

$$u_0(t) = e^{-t^2}$$

$$\Rightarrow u(x,0) = e^{-x^2}$$

حل المعادلة:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-3} = \frac{du}{0}$$

$$x + 3t = k_1$$

$$u(x,t) = k_2$$

f تابع اختياري لـ u أي:

$$u(x,t) = f(x+3t)$$

نعوض بالشرط الابتدائي:

$$e^{-x} = u(x,0) = f(x)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = e^{-(x+3t)^2}$$

وهو حل مسألة القيم الحدية.

مسألة التوصيل بوجود الاضمحلال:

نعبر عن التابع u الذي يضمحل بشكل أسي إذا تحقق المعادلة:

$$\frac{du}{dt} = \lambda u \quad ; \quad \lambda < 0$$

وحل هذه المعادلة:

$$u = c e^{\lambda t}$$

$$u \to 0$$

$$t \to \infty$$

معادلة النقل من هذا الشكل:

$$u_t + cu_x + \lambda u = f \qquad ; \quad \lambda > 0$$

c ثابت

f تابع معطى يمثل منبع خارجي لا يعتمد على u (تابع u إلى الصفر)

λu يمثل هذا الاضمحلال.

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{c} = \frac{du}{f - \lambda u}$$

مثال:

$$u_t + u_x + u = t$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{1} = \frac{du}{t - u}$$

$$x - t = k_1$$

$$\frac{-dt - du}{1 - t + u} = -dt$$

$$\ln(1 - t + u) = \ln e^{-t} + \ln k_2$$

$$e^t(1 - t + u) = k_2$$

$$F(x - t, e^t(1 - t + u)) = 0$$

$$\Rightarrow u - t + 1 = e^{-t} f(x, t)$$

$$u = e^t f(x - t) + t - 1$$

وطلب $t = 0$ ما هو جيث نضع:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{1} = \frac{du}{-u}$$

$$x - t = k_1$$

$$u = k_2 e^{-t}$$

$$u e^t = k_2$$

$$F(x-t, u e^t) = 0$$

$$u = e^{-t} f(x-t)$$

$$t \to \infty$$

$$u \to 0$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z