كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

مثال: لتكن لدينا الأرقام 5, 10, 20, 35, 55, ...

اكتب متتالية تمثل الأرقام الآتية:

$U_n = 5(n+1)$

بشكل تدريجي:

$U_1 = 5$

$U_2 = U_1 + 5$

$U_3 = U_2 + 2(5)$

$U_4 = U_3 + 3(5)$

$U_{n+1} = 2U_n - 5U_{n-1} + 3$

متتالية تراجعية (تدريجية):

ولو كان لدينا $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$ لإيجاد حدود المتتالية

نطبق حدود المتتالية من خلال المعادلة $f(x) = \sqrt{2+x}$

$x = f(x)$ ونحلها:

- أسس تقارب المتسلسلة:

$$① \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

نوجد متتالية المجاميع الجزئية:

$S_0 = \frac{1}{3}$ ، $S_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ ، $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$

$\dots + S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$S_n = a_0 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) / \frac{1}{2}$ ←

$= \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$ ، $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{2}{3}$

ي متسلسلة متقاربة ومجموعها وهي $\frac{2}{3}$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2n+3$

$\lim_{n\to\infty} 2n+3 = \infty$

ومنه المتسلسلة متباعدة.

- اختبارات المتسلسلات العددية:

- اختبار التكامل: لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وموجبة ومتناقصة على مجال $[k,+\infty[$ و $f(n)=a_n$ بمثل متتالية تبدأ من k أو ما فوقه عندئذ المتسلسلة $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة إذا كانت التكاملة $\int_k^{\infty} f(x)dx$ متقاربة وتكون متباعدة إذا كانت التكاملة متباعدة.

ملاحظة:

((التكاملة من النوع $\int_k^{\infty} f(x)dx$ يدعى تكاملة معتلة بحد هذا التكامل اعتماداً على النهاية التالية

$$\int_k^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_k^{a} f(x)dx$$

إذا كانت النهاية محدودة وتساوي عدد ثابت قلنا أنه التكامل متقارب أما إذا كانت النهاية غير محدودة وغير موجودة قلنا أن التكامل متباعد.

تمرين: ادرس تقارب التكاملة

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to\infty} [Ln(x)]_1^a =$$

$= Ln(a) - 0 = Ln(\infty) = +\infty$ التكاملة متباعدة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: لدينا المتسلسلة

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$

ادرس التقارب

لدينا $f(x)=\frac{1}{x\ln(x)}$ معرفة على $[2,+\infty[$ موجبة ومستمرة ومتناقصة على هذا المجال.

$$\lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{a\to\infty} [\ln\ln(x)]_2^a = \lim_{a\to\infty} \ln(\ln(a)) - \ln(\ln(2)) = +\infty$$

المتسلسلة متباعدة

نتيجة: يمكن اثبات أن المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة بينما المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$; $p>1$ هي متسلسلة ريمانية متقاربة بينما $p\leq 1$ تكون المتسلسلة متباعدة

البرهان:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$$

$f(x)=\frac{1}{x^p}$ موجبة ومستمرة ومتناقصة على $[1,+\infty[$

$$\lim_{a\to\infty} \int_1^a x^{-p}dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^a = \lim_{a\to\infty}\left\{\frac{a^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right\}$$

$-p+1<0 \Rightarrow p>1$: $= \frac{-1}{-p+1} = \frac{1}{p-1}$ متقاربة

$-p+1\geq 0 \Rightarrow p\leq 1$: $= +\infty$ متباعدة

تمرين: ادرس تقارب

~~لدينا~~ $\sum_{n=0}^{\infty} n.e^{-n^2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: $f(x) = x e^{-x^2}$ موجب ومستمر ولكن لمعرفة أنه متناقص نشتق $f(x) = x e^{-x^2}$

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = (1 - 2x^2) e^{-x^2}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	↗		$f(\frac{1}{\sqrt{2}})$		↘

التابع متناقص تماماً على مجال $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$

$$\lim_{a\to\infty} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{a} x e^{-x^2} dx = \lim \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{a}$$

$$= \lim \left(-\frac{1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

وهي التكامل متقارب فالمتسلسلة متقاربة.

- اختبار المقارنة: لتكن لدينا المتسلسلتين الآتيتين

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

إذا كان $a_n \le b_n$ وكان b_n متقاربة فإنه المتسلسلات a_n متقاربة وبالعكس إذا كانت المتسلسلة متباعدة كانت المتسلسلة b_n متباعدة.

مثال:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$$

لنأخذ المتتالية $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

$$\frac{1}{n+3^n} < \frac{1}{3^n}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعلم أنّ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ متقاربة $\Leftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$ متقاربة

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2-\cos^2 n}$

الحلّ: نأخذ السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n} < \frac{n^2}{n^2-\cos^2 n}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة $\Leftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2-\cos^2 n}$ متباعدة

- الاختبار النهائي: لدينا المتسلسلتين a_n ، b_n

إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ حيث $0 < c < \infty$ فإنّ المتسلسلتين من طبيعة واحدة.

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n - n}$

نقارب مع السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

$$\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n-n}} = \frac{1}{3^n}(3^n - n) = 1 - \frac{n}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{3^n \ln(3)} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

فالمتسلسلات من هذه الصيغة واحدة.

المتسلسلات متناوبة الإشارة.

ملاحظة: جميع الاختبارات السابقة ذُكرت في حالة المتسلسلات ذات حدود موجبة.

- نقول عن متسلسلة أنها متناوبة إذا كانت على الشكل الآتي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n$$

حيث a_n متتالية ذات حدود موجبة.

مثال: $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$

- لدراسة تقارب هذه السلاسل نستخدم اختبار ليبنز ضمن شروط محددة وهي:

① إذا كانت المتتالية a_n ذات حدود موجبة ومتناقصة وتؤول نهايتها للصفر عندئذٍ تكون المتسلسلة المتناوبة متقاربة.

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2n}$$

أدرس تقارب السلسلة.

الحل:

$\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ موجبة لأنه $\frac{\pi}{2n}$ بالربع الأول ومتناقصة

$$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{\pi}{2n} = 0$$

⇐ المتسلسلة متقاربة حسب اختبار ليبنز.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة آخر:

لنأخذ متسلسلة القيم المطلقة

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin\frac{\pi}{2n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n}$$

نقارنه مع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2} \lim \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2}$$

المتسلسلتان من طبيعة واحدة

$\sum \frac{1}{n}$ متباعدة $\Leftarrow$ $\sum \sin\frac{\pi}{2n}$ متباعدة.

ملاحظة: إذا كانت المتسلسلة المتناوبة متقاربة وكانت متسلسلة القيم المطلقة متباعدة نقول أنها متقاربة شرطياً.

ملاحظة: إذا كانت متسلسلة القيم المطلقة متقاربة كانت المتسلسلة الأساسية متقاربة

وظيفة:

أدرس تقارب المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2\pi}{n\ln(n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n^2}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n^2+n}{\sqrt[3]{n^7+n^3}}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة