كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٢٠٢٦

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

- إيجاد صفوف التكافؤ للعلاقة السابقة (علاقة التوافق)

لسهولة من أجل أي عنصر من $\mathbb{Z}$ صفة التكافؤ هو $a \in \mathbb{Z}$

$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} ; a \mathcal{R} b\} = \{b \in \mathbb{Z} ; 5 \mid a-b\}$

$\bar{0} = \{b \in \mathbb{Z} ; 5 \mid a-b\} = \{\ldots, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}$

$\bar{1} = \{b \in \mathbb{Z} ; 5 \mid 1-b\} = \{\ldots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \ldots\}$

$\bar{2} = \{b \in \mathbb{Z} ; 5 \mid 2-b\} = \{\ldots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \ldots\}$

$\bar{3} = \{b \in \mathbb{Z} ; 5 \mid 3-b\} = \{\ldots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, 23, \ldots\}$

$\bar{4} = \{b \in \mathbb{Z} ; 5 \mid 4-b\} = \{\ldots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\}$

$\bar{5} = \{b \in \mathbb{Z}, 5 \mid 5-b\} = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$

$= \bar{0}$

نلاحظ أنه أي صف تكافؤ منه صفوف التكافؤ السابقة منفصلة مثنى مثنى أي أنه $\forall a, b \in \mathbb{Z} ; \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$

ونلاحظ أننا توقفنا عند حد صفوف التكافؤ لأنه

العلاقة عند صفوف التكافؤ لأنه $\bar{a}=\bar{5}$ حيث $5\in\bar{a}$
وكذلك فإن $\bar{6}=\bar{1}$ وكذلك $\bar{7}=\bar{2}$ ، $\bar{8}=\bar{3}$ ، $\bar{9}=\bar{4}$
وهكذا حسب النظرية:

إذا كان $\bar{a}=\bar{b} \Leftrightarrow b\in\bar{a}$

كذلك نلاحظ أنه صفوف تكافؤ هذه العلاقة محددة وفقاً لباقي قسمة عدد صحيح على 5 حيث بواقي القسمة هي 0،1،2،3،4 (أي باقي قسمة أي عدد صحيح على 5) وعدد صفوف تكافؤ هذه العلاقة هي $\bar{a},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}$
وكما ذكرنا سابقاً نلاحظ أنه صفوف تكافؤ منطبقة إما متساوية أو منفصلة مثنى مثنى وكذلك فإن

$$\bar{0}\cup\bar{1}\cup\bar{2}\cup\bar{3}\cup\bar{4}=\mathbb{Z}$$

إذاً $\mathbb{Z}=\bigcup_{a\in\mathbb{Z}}\bar{a}$ إذا صفوف التكافؤ لهذه العلاقة تشكل تجزئة للمجموعة $\mathbb{Z}$ ومجموعة صفوف التكافؤ هي

$$\mathbb{Z}/\mathbb{R}=\{\bar{a},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$$

أو

$$\mathbb{Z}=\mathbb{R}=\{\bar{a},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$$

أي مثلاً = برمز التوافق = $\mathbb{Z}$ علاقة توافق
وبشكل عام ندعو علاقة التوافق المعرفة بالمثال السابق علاقة التوافق على $\mathbb{Z}$ ونرمز لها بالرمز = أو اختصاراً $\equiv_n$ ونعرف هذه العلاقة بشكل عام على $\mathbb{Z}$ كما يلي:

إذا كان $x\in\mathbb{Z}$ و $n>1$ عندئذٍ نعرف العلاقة R بالشكل

$$\forall x,y\in\mathbb{Z}: xRy \Leftrightarrow n\mid x-y$$

أو بالشكل: $\forall x,y\in\mathbb{Z}: xRy \Leftrightarrow x-y=k\cdot n;\ k\in\mathbb{Z}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall x,y \in Z \quad xRy \Leftrightarrow x \equiv y \pmod n$ أو بالشكل

وتقرأ x يوافق y بالقياس n وعدد صفوف هذه العلاقة هو n وهي:

$$Z/R = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

ونرمز لها بالرمز Z_n وهي

$$\bar{0} = \{\ldots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \ldots\}$$

$$\bar{1} = \{\ldots, -2n+1, -n+1, n+1, 2n+1, 3n+1, \ldots\}$$

$$\bar{2} = \{\ldots, -2n+2, -n+2, n+2, 2n+2, 3n+2, \ldots\}$$

$$\vdots$$

$$\overline{n-1} = \{\ldots, -2n+(n-1), -n+(n-1), n-1, n+(n-1), 2n+(n-1), \ldots\}$$

- تدعى المجموعة مجموعة صفوف تكافؤ هذه العلاقة

$$\overline{Z_n} = Z/R = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

مجموعة صفوف البواقي قياس n

إذ أن المجموعة $Z_n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ وتدعى مجموعة بواقي القسمة عدد صحيح موجب a على n أي $n \mid a$ حيث $a = qn + r$ حسب القسمة الإقليدية تدعى r باقي قسمة a على n أو a على n المقسوم و n المقسوم عليه و q ناتج قسمة a على n

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين هام: إذا كانت R علاقة تكافؤ معرفة على مجموعة ما غير خالية عندئذٍ فإن R^{-1} هي العلاقة العكسية لـ R والمعرفة على A أيضاً هي علاقة تكافؤ أيضاً.

علاقة الترتيب: لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة غير الخالية A وندعو R علاقة ترتيب (علاقة ترتيب جزئي) على المجموعة A إذا كانت R انعكاسية وتالفية ومتعدية ونرمز لعلاقة الترتيب أحياناً بالرمز $\leq$ أو $\geq$

مثال: R علاقة معرفة على المجموعة Z بالشكل التالي

$\forall a,b \in Z ; aRb \Leftrightarrow a-b \leq 0$

برهن أن R علاقة ترتيب

الحل:

R انعكاسية لأن

$\forall a \in Z \Rightarrow a-a \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 0 \Rightarrow aRa$

شرط التالفية:

تكون k تالفية إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$\forall a,b \in Z ; aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$

لدينا $\forall a,b \in Z ; aRb \wedge bRa \Rightarrow a-b \leq 0 \wedge b-a \leq 0$

وهذا لا يتحقق إلا عندما $a=b$ والعلاقة R تالفية

شرط التعدية: تكون k متعدية إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$\forall a,b,c \in Z ; aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

$\forall a,b,c \in Z ; (aRb \wedge bRc) \Rightarrow (a-b \leq 0) \wedge (b-c \leq 0) \Rightarrow$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(a-b)+(b-c)\leq 0 \Rightarrow a-c\leq 0 \Rightarrow aRc$

العلاقة R انعكاسية وتخالفية ومتعدية هي علاقة ترتيب على Z

بعض التعاريف

① العناصر المتقارنة، علاقة الترتيب الكلي

- إذا كانت R علاقة ترتيب معرفة على مجموعة ما غير خالية A عندئذٍ:

1- إذا كان x, y عنصرين من A فإننا ندعو العنصرين x, y متقارنان بالنسبة لـ R إذا كان xRy أو yRx

2- إذا كان كل عنصرين من A متقارنان بالنسبة لـ R عندئذٍ ندعو علاقة الترتيب R علاقة ترتيب كلي ونقول هذه الحالة إن A مجموعة مرتبة كلياً أو مرتبة خطياً وفق العلاقة R

مثال على علاقة الترتيب الكلي:

علاقة $\leq$ المعرفة على Z

② تعريف: إذا كانت A مجموعة مرتبة بالعلاقة R (أي R علاقة ترتيب معرفة على A، $A\neq\varphi$) عندئذٍ

① ندعو العنصر $a\in A$ عنصر أول (أصغر) في A إذا كانت $aRx \;\forall x\in A$ أي أن a يسبق جميع عناصر المجموعة

② ندعو العنصر $b\in A$ عنصر أكبر من A إذا كان $xRb \;\forall x\in A$ (أي أن b يكون لاحقاً لجميع عناصر a)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لتكن المجموعة Z^+ مرتبة بعلاقة الترتيب
$\leq$ عندئذٍ فإن العنصر الأول فيها هو 1 لأنه
$\forall x \in Z^+ : 1 \leq x$ (أي أن العنصر يسبق جميع
العناصر الصحيحة الموجبة) ولكن ليس لها عنصر أخير
في Z^+ بالنسبة لـ $\leq$ أما إذا أخذنا المجموعة Z وهي
مجموعة مرتبة بالنسبة لعلاقة الترتيب $\leq$ فإن
$b = 0$ هو عنصر أخير في هذه المجموعة لأنه $a \leq b = 0$ مهما كان
a جميع الأعداد الصحيحة السالبة $a \leq 0$ وذلك $\forall a \in Z$ ولكن
ليس فيها عنصر أول.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z