كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة: الثانية/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

حل المعادلات غير الخطية

تمهيد:

نعلم أنه إذا كانت المعادلة من الشكل $ax + b = 0$ حيث $a \neq 0$ فإن حلها هو $x = \frac{-b}{a}$ و هي معادلة خطية و كل معادلة ليست من الشكل $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \mathrm{b}$ ندعوها معادلة غير خطية، كما أن المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث$a \neq 0$ معادلة من الدرجة الثانية تستخدم صيغاً مباشرة لإيجاد الجذور الدقيقة لها سواء كانت حقيقة أم مركبة.

إلا أن الحياة ملأى بالمعادلات التي تخرج عن دائرة هذه الحالات البسيطة بالتالي لا يمكن الوصول إلى الحل الدقيق بالطرق التحليلية المعروفة، و في هذه الحالة نبحث عن جذور تقريبية للحل الدقيق بتفاوت مسموح به معطى ε.

تعريف: يقال إن العدد a جذر للمعادلة $f(x) = 0$ إذا كان $f(a) = 0$ سنرمز للحل التقريبي بالرمز $\bar{x}$ حيث $|f(\bar{x})| < \varepsilon$ ، و لإيجاد هذا الحل التقريبي نعطي تخمين ابتدائي له إما بطرق بيانية أو تحليلية ثم اتباع طرائق معينة تعتمد التكرار للوصول إلى تقريب مقبول للجذر الدقيق.

لنبدأ بالطريقة الأولى:

1. طريقة تنصيف المجال:

ليكن f تابعاً مستمراً على المجال $[a, b]$ و لنفرض أن $f(a).f(b) < 0$ عندئذٍ توجد قيمة $a < x_0 < b$ بحيث أن $f(x_0) = 0$

المطلوب إيجاد قيمة تقريبية لهذا الجذر بتفاوت مسموح به ε، للتبسيط سنفترض وجود جذر وحيد في المجال $[a, b]$، تستدعي هذه الطريقة التنصيف المتكرر للمجالات الجزئية من المجال $[a, b]$ و كل خطوة فيها تعين النصف الذي يحوي الجذر x_0، لتطبيقها:

نفرض بدايةً أن $a_1 = a$ و $b_1 = b$ و نضع $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{a+b}{2}$ (أول تخمين) فإذا كان $f(x_1) = 0$ فإن $\bar{x} = x_1$ أو $|f(x_1)| < \varepsilon$ (انتهى الحل) وإلا:

$f(x_1) \neq 0$ عندئذٍ تكون إشارة $f(x_1)$ إما من إشارة $f(a_1)$ أو من إشارة $f(b_1)$

* إذا كانت إشارة $f(x_1)$ من إشارة $f(a_1)$ فإن $x_0 \in [x_1, b_1]$ و عندئذٍ نضع $a_2 = x_1$ و $b_2 = b_1$.

* إذا كانت إشارة $f(x_1)$ تعاكس إشارة $f(a_1)$ فإن $x_0 \in [a_1, x_1]$ و عندئذٍ نضع

$a_2 = a_1$ و $b_2 = x_1$.

ثم نعيد تكرار الخطوات السابقة على المجال $[a_2, b_2]$ و نستمر بالتكرار إلى أن يتحقق المعيار $|f(x_i)| < \varepsilon$.

مثال: استخدم طريقة تنصيف المجال لإيجاد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 0$ حيث $f(x) = x^3 - 3x - 1$ و $\varepsilon = 0.05$.

الحل:

$$f(0) = -1 < 0 \text{ ، } f(1) = -3 < 0 \text{ ، } f(2) = 1 > 0$$

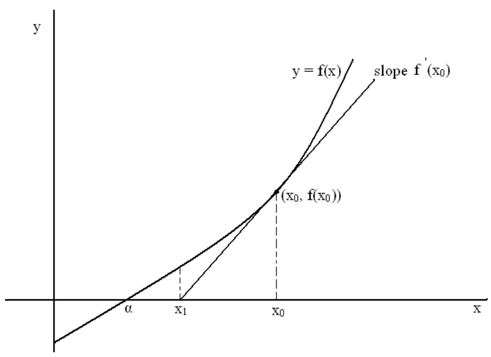
بما أن $f(1).f(2) < 0$ فإن جذر المعادلة $f(x) = 0$ ينتمي للمجال $[1,2]$

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5 \Longrightarrow f(1.5) = -2.125 \neq 0, |f(1.5)| > 0.05$$
$$f(1.5).f(2) < 0 \Longrightarrow x_0 \in [1.5,2]$$
$$x_2 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75 \Longrightarrow f(1.75) = -0.890625 \neq 0, |f(1.75)| > 0.05$$
$$f(1.75).f(2) < 0 \Longrightarrow x_0 \in [1.75,2]$$
$$x_3 = \frac{1.75+2}{2} = 1.875, f(1.875) = -0.035 \neq 0$$

لكن $|f(1.875)| = 0.035 < 0.05$ فالحل التقريبي المقبول هو $\bar{x} = 1.875$.

2. طريقة نيوتن _ رافسون:

هي إحدى أكثر الطرق العددية كفاءة في مسائل إيجاد الحلول التقريبية للجذور الدقيقة، تعتمد هذه الطريقة على افتراض أن التابع $f(x)$ و مشتقاته الأولى مستمرة في جوار ما للجذر x للمعادلة $f(x) = 0$.



لنفرض أن x_0 تقريب ابتدائي للجذر x بشرط أن هذا التقريب مقبول أي أن $|x - x_0|$ صغير بشكل كاف.

إن مبدأ عمل هذه الطريقة يعتمد على إنشاء مماس لمنحني التابع C_f في النقطة $(x_0, f(x_0))$

بالتالي هذا المماس سيقطع محور الفواصل (ox) في نقطة ما فاصلتها x_1 أي في النقطة $(x_1, 0)$، فتكون x_1 تقريب للجذر x أقرب من x_0، و لتحديد قيمة x_1:

نكتب معادلة المماس لمنحني التابع C_f في النقطة $\big(x_0, f(x_0)\big)$ حيث ميله $m = \acute{f}(x_0)$

$y - f(x_0) = \acute{f}(x_0)(x - x_0)$ ، ومنه : $0 - f(x_0) = \acute{f}(x_0)(x_1 - x_0)$

أي أن: $x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{\acute{f}(x_0)}$ و بالتالي: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\acute{f}(x_0)}$

نكرر الخطوات السابقة بإنشاء مماس لمنحني التابع C_f في النقطة $\big(x_1, f(x_1)\big)$ لنحصل على: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\acute{f}(x_1)}$

و هكذا بإنشاء المماسات المتتابعة نحصل على متتالية من التقريبات للجذر x يعطى حدها العام بالصيغة : $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{\acute{f}(x_{n-1})}$ حيث $n \geq 1$

و يكون التكرار رقم n هو الجذر التقريبي المقبول إذا تحقق الشرط $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ أو $|f(x_n)| < \varepsilon$ حيث ε الخطأ المسموح به.

مثال (1): أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 0$ مستخدماً طريقة نيوتن رافسون حيث:

$$f(x) = x^4 - x - 10 \quad \text{و} \quad \varepsilon = 5 \times 10^{-5}$$

$$f(0) = -10 < 0 \,, f(1) = -10 < 0 \,, f(2) = 4 > 0$$

بما أن $f(1).f(2) < 0$ فإن $x_0 \in [1,2]$

$\acute{f}(x) = 4x^3 - 1$ نضع $x_0 = 2$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\acute{f}(x_0)} = 2 - \frac{4}{31} = 1.8709677$ و يكون $|x_1 - x_0| = 0.129 > \varepsilon$

$$f(x_1) = 0.3826735 \,, \acute{f}(x_1) = 25.1974422$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\acute{f}(x_1)} = 1.8557807 \,, |x_2 - x_1| = 0.015187 > \varepsilon$$

$$f(x_2) = 0.0048181 \,, \acute{f}(x_2) = 24.564655$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{\acute{f}(x_2)} = 1.855585 \,, |x_3 - x_2| = 0.0001957 > \varepsilon$$

$$f(x_3) = 0.000011575 \,, \acute{f}(x_3) = 25.5565509$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{\acute{f}(x_3)} = 1.8555845 \,, |x_4 - x_3| = 0.0000005 < 0.00005$$

فالحل التقريبي المقبول هو $\bar{x} = x_4$.

مثال (2): أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 0$ مستخدماً طريقة نيوتن رافسون حيث:

$f(x) = x^3 - 2x - 30$ و $\varepsilon = 0.0005$

$f(0) = -30, f(1) = -31\,, f(2) = -26\,, f(3) = -9, f(4) = 26$

بما أن $f(3).f(4) < 0$ فإن جذر المعادلة $f(x) = 0$ ينتمي للمجال $[3,4]$

نضع $x_0 = \frac{3+4}{2} = 3.5$، و لدينا $\acute{f}(x) = 3x^2 - 2$

$$f(x_0) = (3.5)^3 - 2(3.5) - 30 = 5.875\,, \acute{f}(x_0) = 3(3.5)^2 - 2 = 34.75$$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\acute{f}(x_0)} = 3.33093$ و $|x_1 - x_0| = 0.16907 > \varepsilon$

$$f(x_1) = (3.33093)^3 - 2(3.33093) - 30 = 0.29512$$
$$\acute{f}(x_1) = 3(3.33093)^2 - 2 = 31.28528$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\acute{f}(x_1)} = 3.32149\,, |x_2 - x_1| = 0.00944 > \varepsilon$$

$$f(x_2) = 0.00068\,, \acute{f}(x_2) = 31.09688$$

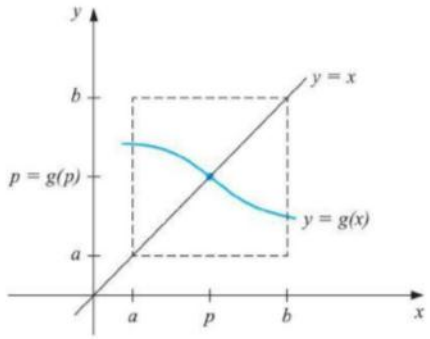
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{\acute{f}(x_2)} = 3.32146\,, |x_3 - x_2| = 0.00003 < 0.0005$$

فالحل التقريبي المقبول هو $\bar{x} = 3.3214$

3. طريقة التقريبات المتتالية (طريقة النقطة الثابتة):

تعريف:

يقال إن التابع $g(x)$ يملك نقطة ثابتة p إذا كان $g(p) = p$.



مثال: النقطة $p = \frac{1}{2}$ نقطة ثابتة للتابع $g(x) = 3x - 1$ لأن:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

مبرهنة:

إذا كان التابع $g(x)$ مستمراً على المجال $[a,b]$ و يحقق $g(x) \in [a,b], \forall x \in [a,b]$

فإن التابع $g(x)$ يملك نقطة ثابتة p في المجال $[a,b]$.

إضافة لذلك : إذا كان $|\acute{g}(x)| \leq k < 1$ لكل $x \in]a,b[$ فالنقطة الثابتة وحيدة.

ليكن $f(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$ و لنفرض أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً حقيقياً في هذا المجال، تتلخص طريقة النقطة الثابتة لإيجاد هذا الجذر بالخطوات الآتية:

1. إعادة ترتيب المعادلة $f(x) = 0$ بإبقاء متغير واحد x على يسار المساواة و تحويل كافة الحدود الأخرى إلى يمينها لنحصل على الصيغة $x = g(x)$.
2. نوجد $\acute{g}(x)$ المشتق الأول للتابع الجديد $g(x)$.
3. نعوض x_0 التخمين الابتدائي للجذر في عبارة $\acute{g}(x)$.
4. نختبر مدى دقة الصيغة $g(x)$ في الوصول للحل باختبار المعيار $|\acute{g}(x_0)| < 1$

a. إذا تحقق المعيار فالصيغة $g(x)$ و التخمين الابتدائي x_0 توصل للحل الصحيح و عندئذ نستخدم الصيغة $x_n = g(x_{n-1}) \ , n \geq 1$ حتى يتحقق لدينا الشرط $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

b. أما إذا كان $|\acute{g}(x_0)| \geq 1$ فإن الصيغة $g(x)$ لا توصل للحل و اختيارنا لها غير موفق و عليه يتوجب علينا إعادة ترتيب المعادلة $f(x) = 0$ بطريقة مختلفة لاستنباط صيغة جديدة للتابع $g(x)$.

مثال (1): باستخدام طريقة التقريبات المتتالية أوجد حل المعادلة $f(x) = 0$ حيث $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 10$ و $\varepsilon = 0.005$.

الحل:

$f(0) = -10, f(1) = -10, f(2) = -8, f(3) = 2$ بما أن $f(2).f(3) < 0$

فجذر المعادلة $f(x) = 0$ ينتمي للمجال $[2,3]$ نضع $x_0 = \frac{2+3}{2} = 2.5$

$$x^3 - 2x^2 + x - 10 = 0 \Longrightarrow x = -x^3 + 2x^2 + 10 = g_1(x)$$

نلاحظ $g_1(2.5) = 6.875 \notin [2,3]$ الخيار غير موفق

$$x^3 - 2x^2 + x - 10 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2}(x^3 + x - 10)$$

$$x = \sqrt{\frac{x^3 + x - 10}{2}} = g_2(x)$$

نلاحظ: $\acute{g}_2(x) = \frac{\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}}{2\times\sqrt{\frac{x^3+x-10}{2}}}$ و $|\acute{g}_2(2.5)| = 2.45 > 1$ الخيار غير موفق

$$x^3 - 2x^2 + x - 10 = 0 \Longrightarrow x^3 = 2x^2 - x + 10$$
$$x = \sqrt[3]{2x^2 - x + 10} = g_3(x)$$
$$\acute{g}_2(x) = \frac{4x-1}{3\times\sqrt[3]{(2x^2-x+10)^2}} \;\Longrightarrow\; \acute{g}_2(2.5) = 0.4072 < 1$$

الخيار موفق لنضع $x_n = g_3(x_{n-1})\,, n \geq 1$

$$x_1 = g_3(x_0) = \sqrt[3]{2(2.5)^2 - (2.5) + 10} = 2.71441$$
$$x_2 = g_3(x_1) = 2.80296$$
$$x_3 = g_3(x_2) = 2.84016$$
$$x_4 = g_3(x_3) = 2.85588$$
$$x_5 = g_3(x_4) = 2.86255$$
$$x_6 = g_3(x_5) = 2.86537$$

$|x_6 - x_5| = 0.003 < \varepsilon$ فالحل التقريبي المقبول هو $\bar{x} = x_6$